

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VIII клас

Зад.1. а) $D = 4 - 8k \Rightarrow$ уравнението има два корена при $k < \frac{1}{2}$, един двоен корен при $k = \frac{1}{2}$ и

няма решение при $k > 0,5$ (**1,5 точки**).

$k = 0,05. A = 0,05. ((\sqrt{27} + \sqrt{0,48} - \sqrt{1,47})\sqrt{3} + (\sqrt{28} + \sqrt{0,0175}) : \sqrt{7} - \sqrt{0,0225}) =$
 $= 0,05.(9 + 1,2 - 2,1 + 2 + 0,05 - 0,15) = 0,5$ (**3 точки**). При $k = 0,5$ получаваме уравнението

$$x^2 - 5x + 6,25 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ (1 точка)}$$

От $x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ или $x_2 = 0$, т. е числото 0 е корен на уравнението $\Rightarrow f(0) = k^2 + 12k = 0 \Rightarrow k = 0$ или $k = -12$ (**1,5 точки**).

Зад.2. а) От AD е ъглополовяща на $\angle CAB$ следва, че $\angle PAN = \angle PAC$

Но $MN \parallel AC$ (MN – средна отс. в $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \angle PAC = \angle APN$ (кръстни ъгли)

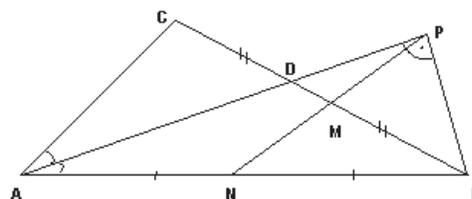
$\Rightarrow \angle PAN = \angle APN$ ($\triangle ANP$ – равнобедрен)

$\Rightarrow AN = NP$

($AN = NP$ по доказателство, $AN = NB$ по условие)

$\Rightarrow \triangle ABP$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха P .

$\Rightarrow AP \perp BP$ (**3,5 точки**).



б) От $AP \perp BP$ следва, че $\triangle ABP$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха P .

$\Rightarrow AN = NB = NP$ (свойство на медианата към хипотенузата)

$\Rightarrow \angle PAN = \angle APN$ ($\triangle ANP$ – равнобедрен)

Но $MN \parallel AC$ (MN – средна отс. в $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \angle PAC = \angle APN$ (кръстни ъгли)

$\Rightarrow \angle PAN = \angle PAC$

$\Rightarrow AD$ е ъглополовяща на $\angle CAB$ (**3,5 точки**).

Зад.3 От $A(1; -8) \in f(x) \Rightarrow a - 2b = -8$ (**1 точка**) \Rightarrow Произведението

$ab = (2b - 8) \cdot b = 2 \cdot ((b - 2)^2 - 4)$ е минимално при $b = 2$ (**2 точки**) $\Rightarrow a = -4$ (**0,5 точки**).

Тъй като $g(x)$ е линейна функция, то $g(x) = cx + d$ (**0,5 точки**). От това, че графиката на $g(x)$ е успоредна на графиката на $f(x)$ следва, че $c = -4$ (**0,5 точки**). Графиката на функцията $y(x) = -x$ е ъглополовяща на втори и четвърти квадрант (**0,5 точки**). Точката $B(x = 5; y)$ принадлежи на графиките на $g(x)$ и $y(x)$ (**0,5 точки**) $\Rightarrow y(5) = -5$ (**0,5 точки**) и $g(5) = -4 \cdot 5 + d = -5 \Leftrightarrow d = 15$ (**0,5 точки**). Следователно $g(x) = -4x + 15$ (**0,5 точки**).