Примерни критерии за оценяване 12 клас:

1 задача

а) За намиране на $f'(x) = 2x\left(1 - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right)$ **(0,5 т.)**

За намиране на корена на уравнението $f'(x) = 0$, x=0 **(1 т.)**

За определяне на интервалите на растене и намаляване: $(-\infty;0)$ намалява и $(0,+\infty)$ расте **(0,5 т.)**

За определяне вида на екстремума в точка x=0 - минимум **(0,5 т.)**

За отговор: f(0)=2 локален минимум **(0,5 т.)**

б) Разглеждаме $g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ и $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2+1}$ **(0,5 т.)**

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ **(0,5 т.)**

За намиране на корените на $g'(x) = 0$, x=0 **(0,5 т.)**

За определяне g(0)=2 – най-голяма стойност **(1 т.)**

За неравенството g(x)<=2<=f(x) **(1 т.)**

За отговор x=0, единствено решение **(0,5 т.)**

2 задача

За въвеждане на ъгъл BAC=x и изразяване на ъгъл ABC=180-γ-x **(1 т.)**

От синусова теорема: AB=2.R.sin γ, BC=2.R.sin x и AC=2.R.sin (γ+x) **(1 т.)**

P_{ABC}=2.R.(sinx+sin γ+sin(γ+x)) **(0,5 т.)**

За разглеждане на функцията P(x)= sinx+sin γ+sin(γ+x) **(0,5 т.)**

За намиране на P'(x)=cosx+cos(γ+x) **(0,5 т.)**

За намиране на корена на уравнението P'(x)=0, $x = 90 - \frac{\gamma}{2}$ **(1 т.)**

За определяне на $x = 90 - \frac{\gamma}{2}$ точка на максимум **(1 т.)**

Триъгълник ABC е равнобедрен **(0,5 т.)**

За изразяване на $P_{MAX} = 4.R.\cos\frac{\gamma}{2}(1 + \sin\frac{\gamma}{2})$ **(1 т.)**

3 задача

а) Нека проекцията на т.M в равнината ABC е т.H.

За доказателство, че H е ортоцентър на ΔABC **(0,5 т.)**

За определяне на <α=<HA_1M (A_1 принадлежи на BC, $A_1 = AH \cap BC$) **(0,5 т.)**

Условието $\frac{S_1}{S} = \cos\alpha$ е еквивалентно на $\frac{BC.MA_1}{BC.AA_1} = \cos\alpha$ **(1 т.)**

За доказателство, че AM е перпендикулярна на MA_1 **(0,5 т.)**

За извода, че $\frac{MA_1}{AA_1} = \cos\alpha$ (от ΔCMC_1 – правоъгълен) **(0,5 т.)**

б) Условието $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ е еквивалентно на $\frac{S_1^2}{S^2} + \frac{S_2^2}{S^2} + \frac{S_3^2}{S^2} = 1$ **(0,5 т.)**

Проекцията на ΔABM в равнината ABC е ΔABH **(0,5 т.)**

$S_{ABH} = S_3.\cos\gamma$ **(1 т.)**

Аналогично $S_{BHC} = S_1.\cos\alpha$ и $S_{AHC} = S_2.\cos\beta$.

$S_{BHC} + S_{AHC} + S_{BHA} = S$ => $S = S1.\cos\alpha + S_2.\cos\beta + S_3.\cos\gamma$ **(1 т.)**

=> $1 = \frac{S_1}{S}\cos\alpha + \frac{S_2}{S}\cos\beta + \frac{S_3}{S}\cos\gamma$ => $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ **(1 т.)**

$$S_{A_1B_1C_1} = 16R^2.\sin\gamma.\cos\gamma.\sin\beta.\cos\beta.\sin\alpha.\cos\alpha$$ **(0,5 т.)**

$$S_{ABC} = \frac{AB.BC.AC}{4R} = \frac{2R.\sin\alpha.2R\sin\beta.2R\sin\gamma}{4R}$$ **(0,5 т.)**

$$S_{ABC} = 2R^2.\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma \Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = 8.S_{ABC}\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$$ **(0,5 т.)**

3 задача:

а) $a_n<1$ за всяко n

Ще използваме математическа индукция. **(0,5 т.)**

$a_1=0$. $3a_2=0+1 \Rightarrow a_2=1/3<1$. Нека за a_k е вярно, че $a_k<1$, ще докажем, че $a_{k+1}<1$ **(0,5 т.)**

$3a_{k+1} = a_k + \sqrt{3a_k^2+1} \Rightarrow a_{k+1} = \dfrac{a_k + \sqrt{3a_k^2+1}}{3}$. Ще докажем, че $\dfrac{a_k + \sqrt{3a_k^2+1}}{3} < 1$ **(1 т.)**

$a_k<1$ от индукционното предположение, $\sqrt{3a_k^2+1} < \sqrt{3.1+1} < 2$

$\Rightarrow a_k + \sqrt{3a_k^2+1} < 1+2=3 \Rightarrow a_k + \sqrt{3a_k^2+1} < 3 \Rightarrow \dfrac{a_k + \sqrt{3a_k^2+1}}{3} < 1$ **(1 т.)**

б) Ще докажем, че $\{a_n\}$ е монотонна растяща и ограничена отгоре.

Монотонност: $a_n < a_{n-1} \Rightarrow a_n + \sqrt{3a_n^2+1} < a_{n+1} + \sqrt{3a_{n+1}^2+1}$ **(1,5 т.)**

Ще използваме мат. индукция. a1<a2, нека $a_k<a_{k+1}$. Ще докажем, че $a_{k+1} < a_{k+2}$.

$3a_{k+2} = a_{k+1} + \sqrt{3a_{k+1}^2+1} > a_k + \sqrt{3a_k^2+1} = 3a_{k+1} \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$. **(1,5 т.)**

От подточка а) следва, че редицата е ограничена отгоре (a_n <1 за всяко n>1) , с което доказателството е извършено. **(1 т.)**