

Примерни критерии за оценяване 11 клас:

1 задача:

а) От свойство на аритметичната прогресия =>

$$2. \lg(1-a) = 1 + \lg \frac{a^2 - 2a + 1}{1+a^2}$$

Д.М. $a < 1$

(1 т.)

$$\lg(1-a)^2 = \lg \frac{10 \cdot (1-a)^2}{1+a^2}$$

(1 т.)

$$(1-a)^2 = \frac{10 \cdot (1-a)^2}{1+a^2}$$

(1 т.)

$$(1-a)^2 \cdot \left(1 - \frac{10}{1+a^2}\right) = 0$$

$$(1-a)^2 \cdot \left(1 - \frac{10}{1+a^2}\right) = 0, a \neq 1 \Rightarrow 1+a^2 - 10 = 0$$

$a = \pm 3, a = -3 \in \text{Д.М.}$

(1 т.)

б) за $a = -3$ уравнението добива вида: $-5.4^x - 11.10^x = -16.25^x$

$$5.2^{2x} + 11.2^x 5^x = 16.5^{2x}$$

(0,5 т.)

$$5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} + 11 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - 16 = 0$$

(1 т.)

Полагаме $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$

(0,5 т.)

За намиране на корените на квадратното уравнение $5t^2 + 11t - 16 = 0$

$$t_1 = 1 \text{ и } t_2 = -3,2$$

(0,5 т.)

За намиране на $x = 0$

(0,5 т.)

2 задача:

а)

Построяваме описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Нека C_1, B_1 и A_1 са пресечни точки съответно на CH, BH и AH с окръжността. (0,5 т.)

Достатъчно е да докажем, че $HN = NC_1, HK = KB_1$ и $HM = MA_1$. (0,5 т.)

$$\angle ABC = \beta \Rightarrow \angle HAN = 90 - \beta;$$

$\angle AC_1N = \beta \Rightarrow \angle C_1AN = 90 - \beta \Rightarrow \triangle HAC_1$ е равнобедрен $\Rightarrow HN = NC_1$. (1 т.)

Аналогично се доказва, че $HK = KB_1$ и $HM = MA_1$.

(1 т.)

б)

$$\angle B_1A_1A = \angle B_1BA = 90 - \alpha. \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$\angle AA_1C_1 = \angle C_1CA = 90 - \alpha \quad (0,25 \text{ т.})$$

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1A_1A + \angle AA_1C_1 = 180 - 2\alpha.$$

$$\text{Аналогично } \angle B_1C_1A_1 = 180 - 2\gamma \text{ и } \angle A_1B_1C_1 = 180 - 2\beta \quad (0,25 \text{ т.})$$

От синусова теорема: $\frac{A_1B_1}{\sin(180 - 2\gamma)} = 2R \Rightarrow A_1B_1 = 2R \cdot \sin 2\gamma$

$$\frac{A_1C_1}{\sin(180 - 2\beta)} = 2R \Rightarrow A_1C_1 = 2R \cdot \sin 2\beta \quad (1 \text{ т.})$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin(\angle B_1A_1C_1)}{2} = \frac{2R \cdot \sin 2\gamma \cdot 2R \cdot \sin 2\beta \cdot \sin 2\alpha}{2} \quad (0,5 \text{ т.})$$

