<u>60-та Национална олимпиада по математика – 12. 02. 2011 г.</u>

КРИТЕРИИ за проверка и оценка на писмените работи - 9 клас

1 зад. а) МДС: $x \in R\backslash\left\{-\frac{11}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$ 0,5 т.

$$-\frac{2}{(3x-1)(3x+11)}=\frac{1}{(3x-1)^2}-\frac{3}{(3x+11)^2}$$

$$\frac{2}{(3x-1)(3x+11)}=\frac{3}{(3x+11)^2}-\frac{1}{(3x-1)^2}$$ 1т.

$$2(3x-1)(3x+11)=3(3x-1)^2-(3x+11)^2$$

$$144x=-96$$ 1т.

$x=-\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}\in МДС$ Следователно е решение на уравнението. 0,5т.

б) $\begin{vmatrix} 3y^2-2x+3+3\sqrt{3y^2-2x+3}-18=0 \\ 3x-2y=5 \end{vmatrix}$ 0,5 т.

Ако $\sqrt{3y^2-2x+3}=t$, то $3y^2-2x+3=t^2$ 0,5 т.

и $t\geq 0$ 0,5 т.

$t^2+3t-18=0$ $t_1=-6$ *не е решение*; $t_2=3$ 0,5 т.

$\sqrt{3y^2-2x+3}=3$ 0,5 т.

$\begin{vmatrix} 3y^2-2x+3=9 \\ 3x-2y=5 \end{vmatrix}$ 0,5 т.

$\begin{vmatrix} 3y^2-2x+3=9 \\ x=\frac{5+2y}{3} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3y^2-2.\frac{5+2y}{3}+3=9 \\ x=\frac{5+2y}{3} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 9y^2-4y-28=0 \\ x=\frac{5+2y}{3} \end{vmatrix}$ 0,5 т.

$\begin{vmatrix} x_1=\frac{17}{27} \\ y_1=-\frac{14}{9} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} x_2=3 \\ y_2=2 \end{vmatrix}$ 0,5 т.

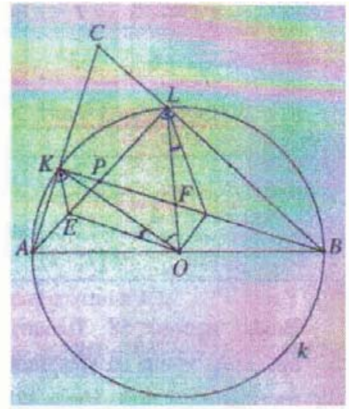
Общо 7 точки

2 зад.

а) $\widehat{KL}$ $=\angle KOL=60^o$ *(централен ъгъл)* 0,5 т.

$\angle ACB=\frac{\widehat{AB}-\widehat{KL}}{2}=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$ 0,5 т.

Но $<PAB=2<PBA$ и $\widehat{BL}=2<LAB=2<PAB=4<PBA=$



$=4<KBA=2\widehat{AK}$ 1 т.

$\widehat{AK}+\widehat{KL}+\widehat{BL}=180^{\circ}$ 0,5 т.

$<CAB=70^{\circ}$; $<ABC=50^{\circ}$ 0,5 т.

б) $OK=OL$, 0,5 т.

$OE=\frac{BP}{2}=LF$ 0,5 т.

(OE – средна отсечка , а LF е медиана в правоъгълния триъгълник PBL)

$KE=\frac{AP}{2}=OF$ (аналогично) 0,5 т.

и $OF \parallel EL$ 0,5 т.

$\Delta KOE \cong \Delta OLF$ (III признак). 0,5 т.

Следователно $<KOE=<OLF$ и четириъгълникът $LEOF$ е равнобедрен трапец

Ако $BP=AL$, то $OE+LF=\frac{BP}{2}+\frac{BP}{2}=BP$ 0,5 т.

$EL+OF=EP+LP+OF=\frac{AP}{2}+PL+\frac{AP}{2}=AP+PL=AL$ 0,5 т.

$OE+LF=EL+OF$

Следователно в четириъгълника $LEOF$ може да се впише окръжност . 0,5 т.

Общо 7 точки

3 зад. а) Нека уравнението да има вида $x^2-px+q=0$

като $p=x_1+x_2$, $q=x_1x_2$ 0,5 т.

$$\begin{cases} p-2q=0 \\ aq-p=2a+1 \end{cases}$$ 0,5 т.

$$\begin{cases} p=2q \\ aq-2q=2a+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p=2q \\ (a-2)q=2a+1 \end{cases}$$ 0,5 т.

Ако $a\neq 2$, то $q=\frac{2a+1}{a-2}$ и $p=\frac{4a+2}{a-2}$ 0,5 т.

$x^2-\frac{4a+2}{a-2}x+\frac{2a+1}{a-2}=0$ 0,5 т.

$(a-2)x^2-(4a+2)x+2a+1=0$ 0,5 т.

б) $(a-2)x^2-(4a+2)x+2a+1=0$

МДС: $a \in R\backslash\{2\}$ 0,5 т.

$x_1+x_2=\frac{4a+2}{a-2}$ и $x_1x_2=\frac{2a+1}{a-2}$ 0,5 т.

$x_1^2+x_2^2=0$

$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=0$ 0,5 т.

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=0$ 0,5 т.

$\left(\frac{4a+2}{a-2}\right)^2-2\frac{2a+1}{a-2}=0$ 0,5 т.

$(4a+2)^2-2(2a+1)(a-2)=0$ 0,5 т.

$6a^2+11a+4=0$ 0,5 т.

$a_1=-1\frac{1}{3}$; $a_2=-\frac{1}{2}$ и са решения на задачата 0,5 т.

Общо 7 точки