$60^{\text{-та}}$ НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ОБЩИНСКИ КРЪГ
12.02.2011г.
XI клас

РЕШЕНИЯ

1зад

А)

-допустими стойности: $x>0,\quad x\neq 1$, $\log_5 x<0 \Rightarrow x<1$. Извод: $x\in(0;1)$ 0,5т

-повдигане на двете страни на уравн. на квадрат, смяна на основата и преобразуване на уравн. до $2\log_x^2 5-\log_x 5-1=0$ 2т

-полагане и реш. 0,5т

1реш: $\log_x 5=1\Rightarrow x=5\notin$ допост ст. 0,5т

2реш: $\log_x 5=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{25}=0{,}04\in$ допуст.ст. 0,5т

Б)

- допустими стойности: $x\neq 0$ и привеждане до квадратно неравенство $y^2-y-12\leq 0$ 1т.

-нам. на реш.за $y\in[-3;4]$ 0,5т.

-връщане в полагането и реш.на $\dfrac{1}{x}\leq 2$ 1т.

-отговор $x\in(-\infty;0)\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ 0,5т.

2зад

А)

-Означаване $b=\dfrac{\sqrt{2}}{q}, m_c=\sqrt{2}, a=\sqrt{2}.q$ 1т.

-от св. на медианата към хип.и Пит.т.получаване на уравнението

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{q}\right)^2+\left(\sqrt{2}.q\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow q^4-4q^2+1=0$$ 1т.

-реш.на бикв.уравн.и получаване на $q=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 1т.

-получ.на рационализирани и опростени отговори $b=\sqrt{3}-1, a=1+\sqrt{3}$ 1т.

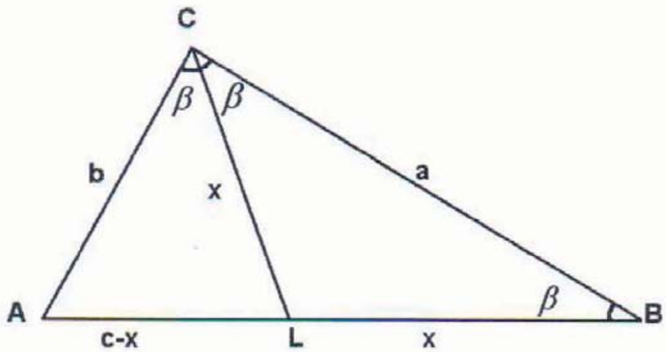
Б)

-разширяване първата дроб с $\dfrac{1}{\cos\alpha}$, а втората с $\dfrac{1}{\sin^2\beta}$ и получаване на

$$\frac{3+5tg\alpha}{4tg\alpha+1}+\frac{5\cot g\beta}{2-3\cot g^2\beta}$$ 2т.

-получ. на отговор M=$2\dfrac{8}{11}$ 1т.

3зад



-За намиране ъглите триъгълника $\angle A = 180^0 - 3\beta, \angle C = 2\beta$ 0,5т

-за св.на аритм.прогресия $a = \dfrac{b+c}{2}$ * 0,5т

-св.на ъглополовящата $\dfrac{x}{c-x} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow x = \dfrac{ac}{a+b}$ ** 0,5т

-косинусова т.за тр.LBC $\cos\beta = \dfrac{a^2 + x^2 - x^2}{2ax} = \dfrac{a}{2x}$ 1т

-заместване * и ** в горното и получаване $\cos\beta = \dfrac{3b+c}{4c}$ *** 1т

-косинусова т. за тр.ABC $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{5c^2 + 2bc - 3b^2}{4c(b+c)}$ 1т

-за изравняване на двата косинуса $\dfrac{5c^2 + 2bc - 3b^2}{4c(b+c)} = \dfrac{3b+c}{4c} \Rightarrow 2c^2 - bc - 3b^2 = 0$ 1т

-за решаване на квадр.уравн.относно с $c_1 = -b$,което не е реш. и $c_2 = \dfrac{3}{2}b$ 1т

-за намиране от *** на $\cos\beta = \dfrac{3}{4}$ 0,5т