МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
София - 1000, бул. „Дондуков" 2а, тел.: 02 9217799
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВЕЛИКО ТЪРНОВО
гр. Велико Търново – 5002, ул. „Арх. Георги Козаров" 1, тел.062 616314, факс 062 628037, п.к. 52

60$^{\text{-та}}$ НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА

XII клас

1зад.

Определяне, че ΔAKM и ΔBLM са равностранни **_1 точка_**

Извод, че $KM = AM$, $ML = BM$ и $KM + ML = a$ $(KM = x,\ ML = y)$ **_0,5 точки_**

Извод, че $\measuredangle KML = 60°$ **_0,5 точки_**

Определяне лицето на $\Delta KLM : S = \frac{1}{2}KM.ML.\sin 60° = \frac{1}{4}xy\sqrt{3}$ **_1 точка_**

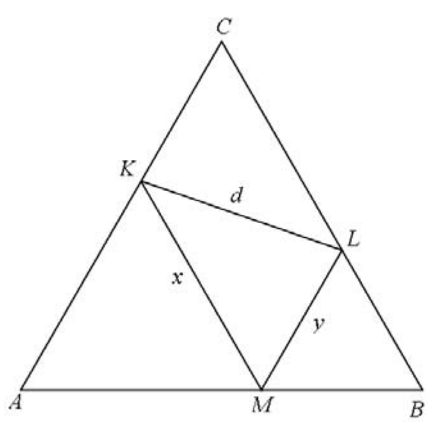
Прилагане на косинусова теорема на ΔKLM :

$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60°$ **_2 точки_**

$d^2 = (x+y)^2 - 2xy - 2xy\frac{1}{2}$

Определяне на $xy = \frac{a^2 - d^2}{3}$ **_1 точка_**

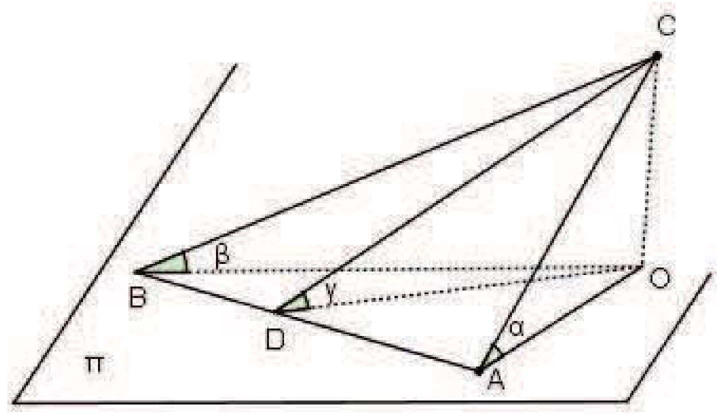
Определяне на $S = \frac{1}{4}xy\sqrt{3} = \frac{\left(a^2 - d^2\right)\sqrt{3}}{12}$ **_1 точка_**



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
София - 1000, бул. „Дондуков” 2а, тел.: 02 9217799
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВЕЛИКО ТЪРНОВО
гр. Велико Търново – 5002, ул. „Арх. Георги Козаров” 1, тел.062 616314, факс 062 628037, п.к. 52

$60^{\text{-та}}$ НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА

2зад.



Нека т. O е ортогоналната проекция на върха C в равнината π. Тогава $\sphericalangle OAC=\alpha$ и $\sphericalangle OBC=\beta$ ***(1 точка).*** Прекарваме $CD\perp AB$ равнината (ABC), откъдето по теорема за трите перпендикуляра $\Rightarrow OD\perp AB \Rightarrow \sphericalangle ODC=\gamma$ е търсеният двустенен ъгъл ***(2 точки)***. Да означим $OC=x$. От правоъгълните триъгълници OAC и OBC $\Rightarrow AC=\frac{x}{\sin\alpha}$ и $BC=\frac{x}{\sin\beta}$ ***(1 точка).*** По теорема на Питагор за ΔABC $\Rightarrow AB=\sqrt{AC^2+BC^2} \Rightarrow AB=\frac{x}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ ***(1 точка)***. Тогава за ΔABC $\Rightarrow$ $AB.DC=BC.AC$ $\Rightarrow$ $DC=\frac{x}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}$ ***(1 точка).*** От ΔDOC намираме $\sin\gamma=\frac{OC}{DC}=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ ***(1 точка).***

3зад. а) При $a=1$ решаваме уравнението $2^{2\cos x}-3.2^{\cos x}+2=0$. Полагаме $2^{\cos x}=y$ $\Rightarrow$ трябва да решим уравнението $y^2-3y+2=0$ $y_{1;2}=2;1$ ***2 точки***

От уравнението $2^{\cos x}=2\Rightarrow\cos x=1\Rightarrow x=2k\pi$, от $2^{\cos x}=1\Rightarrow$ $\cos x=0$ $\Rightarrow$ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ***(по 0,5 точки за всеки от корените).***

б) $2^{2\cos x}-3a.2^{\cos x}+2a^2=0$. Полагаме $2^{\cos x}=y$ $\Rightarrow$ трябва да решим уравнението $y^2-3ay+2a^2=0\Rightarrow D=a^2$ $y_{1;2}=2a;a$ ***2 точки***

От неравенствата

60-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА

$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 2^{-1} \le 2^{\cos x} \le 2$ ***1 точка***

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le a \le 2$ или $\frac{1}{2} \le 2a \le 2$

$a \in \left[\frac{1}{2};2\right] \cup \left[\frac{1}{4};1\right]$

$\Rightarrow a \in \left[\frac{1}{4};2\right]$ ***1 точка***

Забележка: Всяко друго вярно решение на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.