LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

Критерии за оценяване

9. клас

1. Решете:

а) уравнението $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=2$ **3 т.**

б) системата $\begin{vmatrix} x^2+6xy+2y^2-3x=0 \\ 2x^2+3xy-3y^2-4x=0 \end{vmatrix}$ **4 т.**

а) Намерени допустими стойности $x\in[-1,5;4]$. 0,5 т.

Направени преобразуванията:

$\sqrt{2x+3}=2+\sqrt{4-x}\Leftrightarrow 2x+3=4+4\sqrt{4-x}+4-x\Leftrightarrow 3x-5=4\sqrt{4-x}$. 0,5 т.

При $3x-5\geq 0$, т.е. $x\geq\frac{5}{3}$ уравнението е еквивалентно на: 0,5 т.

$(3x-5)^2=16(4-x)\Leftrightarrow 9x^2-14x-38=0$. 0,5 т.

Намерени корените $x_1=3, x_2=-\frac{13}{9}$. 0,5 т.

Извод, че само $x_1=3$ е решение, тъй като $x_1=3\in[-1,5;4]$ и $3>\frac{5}{3}$, а

$x_2=-\frac{13}{9}<\frac{5}{3}$. 0,5 т.

Забележка. Вместо с допустимите стойности и неравенството $3x-5\geq 0$ може да се направи директна проверка дали намерените корени са решения. За директната проверка (без допустими стойности и $3x-5\geq 0$) и направен извод, че само $x_1=3$ е решение. 1,5 т.

б) За последователните преобразувания:

$$\begin{vmatrix} x^2+6xy+2y^2-3x=0 & |.4 \\ 2x^2+3xy-3y^2-4x=0 & |.(-3) \end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 4x^2+24xy+8y^2-12x=0 \\ -6x^2-9xy+9y^2+12x=0 \end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} -2x^2+15xy+17y^2=0 \\ x^2+6xy+2y^2-3x=0 \end{vmatrix}$$

1 т.

Проверено, че двойката (0; 0) е решение на системата. 0,5 т.

При $y\neq 0$ първото уравнение е еквивалентно на $2\left(\frac{x}{y}\right)^2-15\frac{x}{y}-17=0$. 0,5 т.

Намерено: $\frac{x}{y}=-1$ или $\frac{x}{y}=\frac{17}{2}$. 1 т.

Намерено решението на системата при $\frac{x}{y}=-1$ и $y\neq 0$ – двойката $(-1;1)$. 0,5 т.

Намерено решението на системата при $\dfrac{x}{y}=\dfrac{17}{2}$ и $y\neq 0$ – двойката $\left(\dfrac{289}{167};\dfrac{34}{167}\right)$.

0,5 т.

2. Даден е изразът $M=\sqrt{\dfrac{a+9}{3}-2\sqrt{a}}-\sqrt{3}$ **.**

а) Опростете израза *M*. **3 т.**

б) Намерете числената стойност на M **при** $a=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{x_1}{{x_2}^2}+\dfrac{x_2}{{x_1}^2}\right)$**, където** x_1 **и** x_2 **са корените на уравнението** $3x^2-9x-2=0$. **4 т.**

а) Извършени преобразуванията:

$$M=\sqrt{\frac{a+9}{3}-2\sqrt{a}}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{a+9-6\sqrt{a}}}{\sqrt{3}}-\sqrt{3};$$ 1 т.

$$M=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-3\right)^2}}{\sqrt{3}}-\sqrt{3};$$ 1 т.

$$M=\frac{\left|\sqrt{a}-3\right|}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\frac{\left|\sqrt{a}-3\right|-3}{\sqrt{3}};$$ 0,5 т.

$$M=\frac{\left|\sqrt{a}-3\right|-3}{\sqrt{3}}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}-6}{\sqrt{3}} & \text{при } a\geq 9\\ -\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}} & \text{при } 0\leq a<9\end{cases}.$$ 0,5 т.

б) Намерено $x_1+x_2=3$ и $x_1x_2=-\dfrac{2}{3}$. 0,5 т.

Преработено a във вида $a=\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)}{9\left(x_1x_2\right)^2}$. 1,5 т.

Намерено $a=8\dfrac{1}{4}$. 1 т.

От $a=8\dfrac{1}{4}<9\Rightarrow M=-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{\dfrac{33}{4.3}}=-\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. 1 т.

Забележка: Ако в а) е забравен модулът, за а) се отнема 1 т., а ако в б) е намерено a, но е заместено в грешния израз, или не е проверено, че $8\dfrac{1}{4}<9$, се отнема 0,5 т.

3. Дадено е уравнението $\dfrac{2\sqrt{2}a}{x-\sqrt{2}}-\dfrac{2a^2x+2x+4a}{x^2-2}+\dfrac{2}{x+\sqrt{2}}=-1.$

Намерете стойностите на реалния параметър *a*, за които:

а) корените на уравнението са реални противоположни числа. **3 т.**

б) уравнението има единствен реален корен. **4 т.**

а) Намерени допустими стойности $x\neq\pm\sqrt{2}$. 0,5 т.

Извършени преобразуванията:

$$\frac{2\sqrt{2}a}{x-\sqrt{2}}-\frac{2a^2x+2x+4a}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}+\frac{2}{x+\sqrt{2}}=-1\ \left|.\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\neq 0;\right.$$ 0,5 т.

$$2\sqrt{2}ax+4a-2a^2x-2x-4a+2x-2\sqrt{2}=-x^2+2\Leftrightarrow x^2+2a\left(\sqrt{2}-a\right)x-2\sqrt{2}-2=0.$$

0,5 т.

Корените на уравнението са реални противоположни числа, ако $D>0$ и $x_1+x_2=0$, 0,5 т.

т.е. $a^2\left(\sqrt{2}-a\right)^2+2\sqrt{2}+2>0$ и $2a\left(\sqrt{2}-a\right)=0$. 0,5 т.

Неравенството е винаги вярно, а от равенството намираме $a=0$ или $a=\sqrt{2}$. И в двата случаи $x_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$,т.е са допустими стойности. 0,5 т.

б) Тъй като $D>0$ за всяко a, уравнението $x^2+2a\left(\sqrt{2}-a\right)x-2\sqrt{2}-2=0$ винаги има два различни реални корена x_1 и x_2. 0,5 т.

Следователно даденото уравнение ще има единствен корен, ако точно един от корените x_1 и x_2 е недопустима стойност, т.е. е равен на $\sqrt{2}$ или $-\sqrt{2}$. 1 т.

Намерени условия при които:

$\sqrt{2}$ е корен на уравнението $x^2+2a\left(\sqrt{2}-a\right)x-2\sqrt{2}-2=0$, а именно $2\sqrt{2}a^2-4a+2\sqrt{2}=0$ 0,5 т.

и получено, че няма такива реални стойности на a. 0,5 т.

$-\sqrt{2}$ е корен на уравнението $x^2+2a\left(\sqrt{2}-a\right)x-2\sqrt{2}-2=0$, а именно $2\sqrt{2}a^2-4a-2\sqrt{2}=0$ 0,5 т.

и получено, че $a_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, които са търсените стойности на параметъра. 1т.