LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

Критерии за оценяване

8. клас

1. В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(a;\,0)$ и $B(0;$ $b)$, където $a=2\left(\sqrt{54}+\sqrt{1,5}\right)-\sqrt{150}+\left(1-\sqrt{6}\right)^2-\sqrt{(-2)^6}$,

$$b=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

а) Намерете линейната функция, чиято графика е правата AB; 3 т.

б) Постройте вектора $\overrightarrow{OC}$, ако $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$ и докажете, че точка C лежи на правата AB. 4 т.

Намерено:

а) $a=6\sqrt{6}+\sqrt{6}-5\sqrt{6}+1-2\sqrt{6}+6-8=-1$; 1 т.

$b=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$; 1 т.

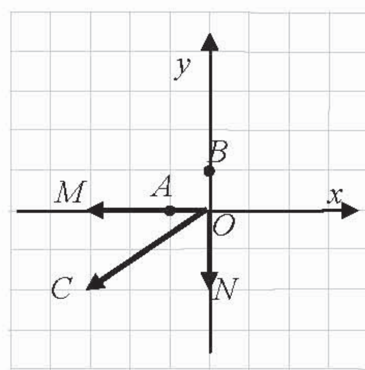
Ако търсената линейна функция е $y=f(x)=kx+n$, за получено $0=k.(-1)+n$ и $1=k.0+n$, намерени $k=1$, $n=1$ и функцията $y=x+1$. 1 т.

б) Построени: точките $A(-1;\,0)$ и $B(0;\,1)$; 0,5 т.

вектори $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{ON}=-2\overrightarrow{OB}$; 1 т.

вектор $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$; 0,5 т.

Намерени координатите на точка $C(-3;\,-2)$. 1 т.

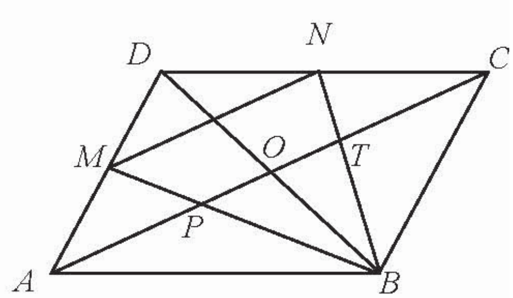


Проверено, че $f(-3)=-2$ (т.е. $-2=-3+1$) и следователно C лежи на правата AB, която е графиката на линейната функция $y=f(x)=x+1$. 1 т.

2. Ъглополовящата на $\measuredangle ABD$ в успоредника $ABCD$ пресича диагонала AC в точка P, а страната AD – в точка M, като $AP:PC=1:2$.

а) Докажете, че правите BP и BC са перпендикулярни. 3 т.

б) Ако N е средата на CD и $BN=12$ cm, намерете дължините на диагонала AC и отсечката MN. 4 т.



а) Доказано: $AP:PO=2:1$ (O е пресечната точка на диагоналите на успоредника); 1 т.

P е медицентър на $\triangle ABD$; 1 т.

BM е медиана и ъглополовяща в $\triangle ABD \Rightarrow AB = BD$ и следователно $BM \perp AD$.

Но $AD \parallel BC \Rightarrow BM \perp BC$. 1 т.

б) Нека $BN \cap AC = T$. За доказано:

T е медицентър на $\triangle BDC$; 1 т.

$BT = \frac{2}{3}BN = 8$ cm; $CT = 2TO = TP$ и BT е медиана в правоъгълния $\triangle BPC$.

1 т.

Намерено:

$PC = 2BT = 16$ cm и $AC = 1{,}5.16 = 24$ cm; 1 т.

$MN = \frac{1}{2}AC = 12$ cm (средна отсечка в $\triangle ADC$). 1 т.

3. От съд с вместимост 50 литра, пълен догоре с чист спирт, отлели известно количество и го допълнили с вода. След това отлели два пъти по-голямо количество от първия път и отново допълнили с вода. Колко литра спирт са отлели първия път, ако накрая в съда е останал спиртен разтвор с концентрация 12%. 7 т.

Нека първият път са отлели x литра чист спирт. Първото смесване е отразено в таблицата::

	Концентрация на спирта	Общо количество, литри	Чист спирт, литри	
Чист спирт	1	$50-x$	$50-x$	0,5 т.
Вода	0	x	0	0,5 т-
Разтвор I	$\frac{50-x}{50}$	50	$50-x$	1 т.

Второто смесване е отразено във втората таблица:

	Концентрация на спирта	Общо количество, литри	Чист спирт, литри	
Разтвор I	$\frac{50-x}{50}$	$50-2x$	$\frac{50-x}{50}(50-2x)$	0,5 т.
Вода	0	$2x$	0	0,5 т-
Разтвор II	12%	50	6	1 т.

За съставен модел $\frac{50-x}{50}(50-2x)=6$. 1 т.

За получено уравнението $x^2-75x+1100=0$ и намерено $x_1=55, x_2=20$. 1 т.

Тъй като $2x < 50$, то $x_1 = 55$ не е решение. Окончателно количеството на отлетия първия път спирт е 20 литра. 1 т.