LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

Критерии за оценяване

7. клас

1. а) Решете уравнението $\frac{1}{7}\cdot\frac{7x+5}{2}-\frac{15x+24}{28}=\frac{3x-2}{4}-x$. **3 т.**

б) Една бригада боядисала половината от определена площ за 2 часа и 30 минути. След това тя увеличила производителността си с 2 m^2 на час и боядисала останалата половина от площта за 2 часа и 20 минути. Намерете колко квадратни метра са били боядисани за първите 3 часа. **4 т.**

а) Получено последователно

$\frac{7x+5}{14}-\frac{15x+24}{28}=\frac{3x-2}{4}-x$ 0,5 т.

$14x+10-15x-24=21x-14-28x$ 1 т.

$6x=0$ 1 т.

Намерено $x=0$. 0,5 т.

б) Въведени x m^2/h и $x+2$ m^2/h са производителностите на бригадата преди и след увеличението. 0,5 т.

Изразени боядисаните площи $\frac{5}{2}x\,m^2$ и $\frac{7}{3}(x+2)$ m^2 преди и след увеличението. 1 т.

Съставен модела $\frac{5}{2}x=\frac{7}{3}(x+2)$ и намерено $x=28$. 1,5 т.

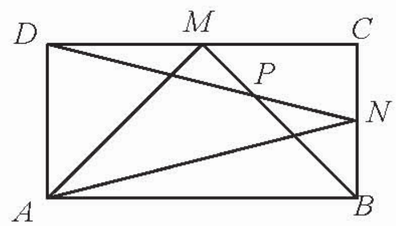
Намерена бояядисаната площ за първите 2 ч 30 мин $\frac{5}{2}\cdot 28=70\,m^2$. 0,5

Намерена боядисаната площ за следващите 30 мин $\frac{1}{2}\cdot 30=15$ m^2, т.е. общо за първите 3 часа 70 + 15 = 85 m^2. 0,5 т.

2. Точките M и N са средите съответно на страните CD и BC на правоъгълника $ABCD$.

а) Докажете, че $\measuredangle CDN = \measuredangle BAN$. **2 т.**

б) Ако P е пресечната точка на правите MB и DN, докажете, че $\measuredangle MAN = \measuredangle DPM$. **5 т.**



а) Доказано $\triangle CDN \cong \triangle BAN$. 1 т.

Извод $\measuredangle CDN = \measuredangle BAN$. 1 т.

б) Доказано $\triangle DAM \cong \triangle CBM$; 1 т.

$\measuredangle DMA = \measuredangle CMB = \alpha$. 1 т.

Следователно $\measuredangle MAB = \measuredangle DMA = \alpha$ като кръстни при $AB \parallel CD$. 1 т.

Изразено:

$\measuredangle MAN = \measuredangle MAB - \measuredangle NAB = \alpha - \beta$, където $\measuredangle CDN = \measuredangle BAN = \beta$; 1 т.

От $\measuredangle BMC$ външен за $\triangle DMP$ следва, че $\measuredangle BMC = \measuredangle DPM + \measuredangle MDP$, т.е. $\Rightarrow \measuredangle DPM = \alpha - \beta = \measuredangle MAN$. 1 т.

3. Дадени са уравненията $3ax - x = 3a^2 - a\left|4x(3a+x) - (3a+2x)^2\right|$ **и** $a(x+12) = -2x - 24$**, където a е параметър.**

а) Решете уравненията. **3 т.**

б) Намерете стойностите на a, за които двете уравнения са еквивалентни. **4 т.**

3. а) За доказано $\left|12ax + 4x^2 - 9a^2 - 12ax - 4x^2\right| = \left|-9a^2\right| = 9a^2$ 0,5 т.

и получено $(3a-1)x = -3a^2(3a-1)$. 0,5 т.

За намерено: при $a = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ всяко число е решение; при $a \neq \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = -3a^2$. 1 т.

За решаване на второто уравнение: при $a = -2$ всяко число е решение; при $a \neq -2$ $\Rightarrow x = -12$. 1 т.

б) При $a = \dfrac{1}{3}$ двете уравнения не са еквивалентни, тъй като решение на първото е всяко число, а второто има единствен корен -12. Аналогично и при $a = -2$ двете уравнения не са еквивалентни. 1 т.

При $a \neq \dfrac{1}{3}$ и $a \neq -2$ и двете уравненията имат по един корен и те ще са еквивалентни, ако корените им са равни, т.е. $-3a^2 = -12$. 1 т.

$-3a^2 = -12 \Leftrightarrow -3a^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow -3\left(a^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow -3(a-2)(a+2) = 0$. 1 т.

Последното равенство е изпълнено при $a = -2$ и $a = 2$. Тъй като $a \neq -2$, единствено решение е $a = 2$, т.е. двете уравнения са еквивалентни при $a = 2$. 1 т.