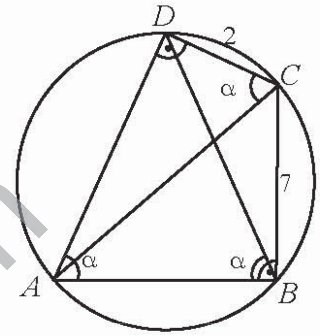
LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

Критерии за оценяване
12. клас

1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с диаметър AC. Намерете косинуса на $\angle ABD$ и лицето на четириъгълника, ако $BC = 7$, $CD = 2$ и $AD = BD$.

7 т.



Намерено $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. 1 т.

Въведено $\angle ABD = \angle BAD = \angle ACD = \alpha$ и изразени ъглите на $\triangle BDC$: $\angle DBC = 90° - \alpha$, $\angle BDC = 2\alpha - 90°$. 1 т.

Приложена синусова теорема в $\triangle BDC$:

$$\frac{2}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{7}{\sin(2\alpha - 90°)}.$$ 1 т.

Получено уравнението $4\cos^2\alpha + 7\cos\alpha - 2 = 0$. 1 т.

Намерено:

$\cos\alpha = \frac{1}{4}$; 1 т.

$AC = \frac{2}{\cos\alpha} = 8$; 0,5 т.

$AD = 2\sqrt{15}$; $AB = \sqrt{15}$; 1 т.

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = 2\sqrt{15} + \frac{7\sqrt{15}}{2} = \frac{11\sqrt{15}}{2}$. 0,5 т.

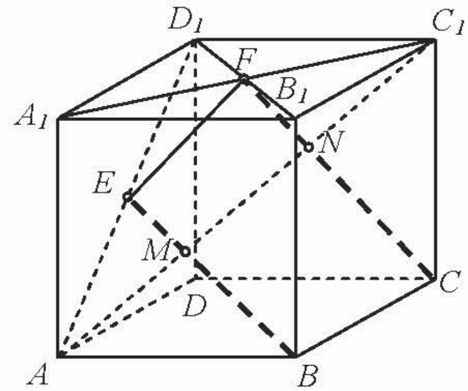
2. От върховете B и C на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са спуснати перпендикуляри BM и CN към диагонала му AC_1 $(M \in AC_1, N \in AC_1)$.

а) Намерете отношението $AM : MN : NC_1$. **2 т.**

б) Ако правата BM пресича равнината (ADD_1) в точка E, а правата CN пресича равнината $(A_1B_1C_1)$ в точка F, докажете, че правите EF и BC са перпендикулярни. **5 т.**

а) В $\triangle ABC_1$: $AB = a$, $BC_1 = a\sqrt{2}$ и $\angle ABC_1 = 90° \Rightarrow AC_1 = a\sqrt{3}$. Но BM е височина към хипотенузата $\Rightarrow AM.a\sqrt{3} = a^2 \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}AC_1$. 1 т.

Аналогично от $\triangle ACC_1 \quad \Rightarrow C_1N = \frac{1}{3}AC_1$.



Тогава $AM : MN : NC_1 = 1:1:1$. 1 т.

б) BM и AC_1 лежат в равнината (ABC_1D_1), която пресича (ADD_1) в правата AD_1. Но $BM \cap AD_1 = E \Rightarrow BM \cap (ADD_1) = E$. 1 т.

От $\triangle AEM \sim \triangle C_1BM \Rightarrow \frac{AE}{BC_1} = \frac{AM}{MC_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

т. E е средата на AD_1. 1 т.

В равнината (ACC_1A_1) $CN \cap A_1C_1 = F \Rightarrow CN \cap (A_1B_1C_1) = F$ и аналогично F е средата на A_1C_1. 1 т.

I начин: EF е средна отсечка в триъгълника $AD_1B_1 \quad \Rightarrow EF \parallel AB_1$, но $BC \perp (ABB_1) \Rightarrow BC \perp AB_1 \Rightarrow EF \perp BC$. 2 т.

II начин: E се проектира в (ABC) в E_1 – среда на AD, F се проектира в (ABC) в F_1 – среда на AC. Но $E_1F_1 \parallel CD, CD \perp BC \Rightarrow E_1F_1 \perp BC \Rightarrow EF \perp BC$ (теорема за трите перпендикуляра). 2 т.

3. а) Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \frac{1+\sin x}{2,25 - \cos^2 x}$. **3 т.**

б) Намерете стойностите на реалния параметър *a*, за които системата $\begin{cases} ay^2 - (a+2)y + a + 1 = 0 \\ (2,25 - \cos^2 x)y = 1 + \sin x \end{cases}$ **има решение.** **4 т.**

а) За полагане $\sin x = t \in [-1;1]$ и получено $f(x) = g(t) = \frac{1+t}{1,25+t^2}$. 1 т.

Намерено:

$g'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 1,25}{(1,25+t^2)^2}$; 0,5 т.

Критични точки $t_1 = -2,5$ и $t_2 = 0,5$ и интервали на растене и намаляване; 0,5 т.

Най-голямата стойност на функцията в интервала $[-1;1]$ е $g(0,5)=1$, а най-малката стойност е $g(-1)=0$. 1 т.

б) Изразено от второто уравнение $y=\dfrac{1+\sin x}{2,25-\cos^2 x}$ и направен извод, че $y\in[0;1]$ и следователно системата има решение когато уравнението $\varphi(y)=ay^2-(a+2)y+a+1=0$ има поне един корен в интервала $[0;1]$. 1 т.

Разгледан случая $a=0$ е решение. 0,5 т.

Разгледан случая, когато уравнението има единствен корен в интервала $[0;1]$: $\varphi(0).\varphi(1)\le 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1)\le 0 \Leftrightarrow a\in[-1;1]$. 1 т.

Разгледан случая когато уравнението има два корена в интервала $[0;1]$:

$$\left|\begin{array}{l} D=-3a^2+4\ge 0 \\ a\varphi(0)\ge 0 \\ a\varphi(1)\ge 0 \\ 0<\dfrac{a+2}{2a}<1 \end{array}\right.$$

и направен извод, че няма решение. 1 т.

Окончателен отговор $a\in[-1;1]$. 0,5 т.