

LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година
12. клас

1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с диаметър AC . Намерете косинуса на $\angle ABD$ и лицето на четириъгълника, ако $BC = 7$, $CD = 2$ и $AD = BD$. **7 точки**

2. От върховете B и C на куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ са спуснати перпендикуляри BM и CN към диагонала му AC_1 ($M \in AC_1, N \in AC_1$).

а) Намерете отношението $AM : MN : NC_1$. **2 точки**

б) Ако правата BM пресича равнината (ADD_1) в точка E , а правата CN пресича равнината $(A_1 B_1 C_1)$ в точка F , докажете, че правите EF и BC са перпендикулярни. **5 точки**

3. а) Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{2,25 - \cos^2 x}. \quad \text{3 точки}$$

б) Намерете стойностите на реалния параметър a , за които

системата
$$\begin{cases} ay^2 - (a+2)y + a+1 = 0 \\ (2,25 - \cos^2 x)y = 1 + \sin x \end{cases}$$
 има решение. **4 точки**