LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

Критерии за оценяване

11. клас

1. Редицата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ **е геометрична прогресия, за която** $a_7 = 8\left(\sqrt{2}-1\right)$ **и** $2a_3 + a_5 = 2$**. Намерете:**

а) първия член и частното на прогресията; **5 т.**

б) най-малкото *n*, за което е изпълнено неравенството $\left|a_n\right| \geq 64\left(\sqrt{2}-1\right)$.

2 т.

а) Получена:

системата $\begin{vmatrix} a_1q^6 = 8\left(\sqrt{2}-1\right) \\ 2a_1q^2 + a_1q^4 = 2 \end{vmatrix}$; 1 т.

уравнението $\dfrac{q^4}{2+q^2} = 4\left(\sqrt{2}-1\right) \Leftrightarrow q^4 - 4\left(\sqrt{2}-1\right)q^2 - 8\left(\sqrt{2}-1\right) = 0$. 1 т.

Намерено:

$q = \pm\sqrt[4]{8}$; 1,5 т.

$a_1 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$; 1 т.

двойките $\left(a_1 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}; q = -\sqrt[4]{2}\right)$ и $\left(a_1 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}; q = \sqrt[4]{2}\right)$. 0,5 т.

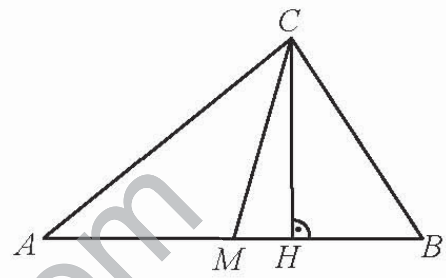
б) Получено неравенството $2^{\frac{3}{4}(n-1)} \geq 2^{\frac{15}{2}}$. 1 т.

Намерено най-голямо цяло решение на неравенството $n = 11$. 1 т.

2. Даден е триъгълник ABC с най-голяма страна AB, височина CH и медиана CM. Ако положителните числа m, n, и s са последователни членове на геометрична прогресия, а отсечките AH, CH и BH имат съответно дължини $\sqrt[3]{mns}$, $\sqrt{\dfrac{mn+ns+sm}{3}}$ и $\dfrac{1}{3}(m+n+s)$, да се докаже, че дължините на отсечките AH, CM и BH са последователни членове на аритметична прогресия. 7 т.

Намерено, че:

$n^2 = ms$ и $AH = n$. 1 т.



Дължините на AH, CM, BH ще образуват аритметична прогресия, ако $2CM = AB$. 0,5 т.

Точка H е вътрешна за AB, тъй като AB е най-голяма и ако има тъп ъгъл в $\triangle ABC$, то той може да е само при върха C. 0,5 т.

I начин:

$AB = AH + BH = n + \dfrac{1}{3}(m+n+s) = \dfrac{1}{3}(m+4n+s)$; 1 т.

$MH = \left|AH - \dfrac{1}{2}AB\right| = \dfrac{1}{6}|2n-m-s|$; 1 т.

$CM^2 = MH^2 + CH^2 = \dfrac{1}{36}\left(18n^2 + m^2 + s^2 + 8mn + 8ns\right)$; 2 т.

Доказано, че $4CM^2 = AB^2$. 1 т.

II начин:

$2CM = AB \Leftrightarrow \angle ACB = 90° \Leftrightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow AH^2 + BH^2 + 2CH^2 = AB^2$. 1 т.

$AB = AH + BH = n + \dfrac{1}{3}(m+n+s) = \dfrac{1}{3}(m+4n+s)$. 1 т.

Доказано, че $AH^2 + BH^2 + 2CH^2 = AB^2$. 3 т.

3. а) За кои стойности на параметъра k уравнението $k = \dfrac{2^{x-1}+5}{2^x+6}$ има реални корени. 2 т.

б) За кои положителни стойности на параметъра a множеството от стойностите на функцията $y = \frac{a^{x-1}+5}{a^x+3a}$ не съдържа нито едно четно число.

5 т.

а) Получено:

$2^x(2k-1) = 10-12k$; 0,5 т.

При $k = \frac{1}{2}$ уравнението няма решение, а при $k \neq \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{10-12k}{2k-1}$. 0,5 т.

Извод, че уравнението има реални корени при $\frac{10-12k}{2k-1} > 0$, 0,5 т.

т.е. $k \in \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$. 0,5 т.

б) От равенството $y = \frac{a^{x-1}+5}{a^x+3a} \Rightarrow y.a^x + 3ay = \frac{1}{a}\cdot a^x + 5 \Rightarrow a^x\left(y - \frac{1}{a}\right) = 5 - 3ay$.

0,5 т.

$y = \frac{1}{a}$ не е стойност на функцията, тъй като за никое x не е изпълнено равенството. 0,5 т.

От $y \neq \frac{1}{a} \Rightarrow a^x = \frac{5-3ay}{y-\frac{1}{a}}$. Тъй като $a^x \in (0; +\infty)$, то стойностите на y са

решенията на неравенството $\frac{5-3ay}{y-\frac{1}{a}} > 0$, то $y \in \left(\frac{1}{a}; \frac{5}{3a}\right)$. 1 т.

Множеството от стойностите на функцията $y \in \left(\frac{1}{a}; \frac{5}{3a}\right)$ няма да съдържа четно число, ако за някое цяло неотрицателно число k е изпълнено, че $2k \leq \frac{1}{a} < \frac{5}{3a} \leq 2k+2$. 0,5 т.

За получено: $2k \leq \frac{1}{a} \leq \frac{3}{5}(2k+2) \Rightarrow k \leq 1,5$, т.е. $k = 0$ или $k = 1$. 1 т.

При $k = 0 \Rightarrow a \geq \frac{5}{6}$, 0,5 т.

при $k = 1 \Rightarrow \frac{5}{12} \leq a \leq \frac{1}{2}$ 0,5 т.

Окончателно $a \in \left[\frac{5}{12}; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$. 0,5 т.