LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година
11. клас

1. Редицата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е геометрична прогресия, за която $a_7 = 8\left(\sqrt{2}-1\right)$ и $2a_3 + a_5 = 2$. Намерете:

а) първия член и частното на прогресията; **5 точки**

б) най-малкото n, за което е изпълнено неравенството $\left|a_n\right| \geq 64\left(\sqrt{2}-1\right)$. **2 точки**

2. Даден е триъгълник ABC с най-голяма страна AB, височина CH и медиана CM. Ако положителните числа m, n, и s са последователни членове на геометрична прогресия, а отсечките AH, CH и BH имат съответно дължини $\sqrt[3]{mns}$, $\sqrt{\dfrac{mn+ns+sm}{3}}$ и $\dfrac{1}{3}(m+n+s)$, да се докаже, че дължините на отсечките AH, CM и BH са последователни членове на аритметична прогресия. **7 точки**

3. а) За кои стойности на параметъра k уравнението $k = \dfrac{2^{x-1}+5}{2^x+6}$ има реални корени. **2 точки**

б) За кои положителни стойности на параметъра a множеството от стойностите на функцията $y = \dfrac{a^{x-1}+5}{a^x+3a}$ не съдържа нито едно четно число. **5 точки**