LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

Критерии за оценяване

<u>**10. клас**</u>

1. а) Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $y=-x^2+6x-4$ **при** $x\in[0;4]$**.** **3 т.**

б) Намерете за кои стойности на параметъра ***a*** **най-малката стойност на функцията** $f(x)=a\left(x^2-6x+4\right)^2-a\left(6x-x^2\right)-1$ **при** $x\in[0;4]$ **е равна на –13.**

4 т.

а) Намерено:

абсцисата на върха на параболата $x = 3$ и ординатата $y(3) = 5$; 1 т.

$y(0) = -4$ и $y(4) = 4$. 0,5 т.

Начертана параболата при $x\in[0;4]$ или обосновано, че при $x\in[0;4]$ функцията расте, а при $x\in[3;4]$ – намалява. 1 т.

Извод, че най-малката стойност на функцията е -4, а най-голямата е 5. 0,5 т.

б) Въведено помощно неизвестно $t=-x^2+6x-4$ и изразена функцията чрез t

$f(x)=a\left(-x^2+6x-4\right)^2-a\left(-x^2+6x-4\right)-4a-1=g(t)=at^2-at-4a-1$ 1 т.

Направен извод, че $t\in[-4;5]$. 0,5 т.

При $a > 0$ намерено, че най-малката стойност на $g(t)$ е равна на $g\left(\frac{1}{2}\right)$ и

$\frac{a}{4}-\frac{a}{2}-4a-1=-13\Rightarrow a=\frac{48}{17}$. 1 т.

При $a < 0$ намерено, че най-малката стойност на $g(t)$ е равна на

$g(-4)=g(5)=16a-1$ и $16a-1=-13\Rightarrow a=-\frac{3}{4}$. 1 т.

Извод, че при $a = 0$, функцията е равна на константата -1, т.е. $a = 0$ не е решение.

0,5 т.

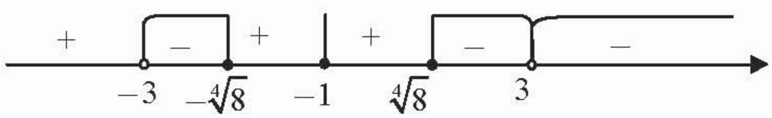
2. Решете неравенството $\frac{\left(x^4-8\right)\left(x^2-2x-3\right)^{2010}}{\left(9-x^2\right)^{1009}.\left(2x-6\right)^{1001}}\le 0$ **и проверете дали числото** $a=\left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{72}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{128}\right)$ **е негово решение.** **7 т.**

Намерени допустими стойности $x \neq \pm 3$. 0,5 т.

Получено: $\dfrac{\left(x-\sqrt[4]{8}\right)\left(x+\sqrt[4]{8}\right)\left(x^2+\sqrt{8}\right)\left(x+1\right)^{2010}}{-2^{1001}\left(x+3\right)^{1009}} \leq 0$. 1 т.

Извод, че $x^2+\sqrt{8}>0$ и $\left(x+1\right)^{2010} \geq 0$ за всяко x. 0,5 т.

Извод, че $x=\pm\sqrt[4]{8}$ и $x=-1$ са решения. 0,5 т.



1 т.

Намерено, че решение на неравенството е $x \in \left(-3; -\sqrt[4]{8}\right] \cup \{-1\} \cup \left[\sqrt[4]{8}; 3\right) \cup \left(3; +\infty\right)$.

1 т.

Намерено

$$a=\left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{72}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{128}\right)=6+3\sqrt[3]{\frac{32}{3}}+3\sqrt[3]{\frac{128}{9}}-\sqrt[3]{4.72}-\sqrt[3]{4.96}-\sqrt[3]{4.128}=$$

$$6+2\sqrt[3]{4.9}+4\sqrt[3]{2.3}-2\sqrt[3]{4.9}-4\sqrt[3]{2.3}-8=-2.$$ 2 т.

Проверено, че $-3<-2<-\sqrt[4]{8}$ и следователно -2 е решение на неравенството.

0,5 т.

3. Нека $f(x)=x^2-2mx+8$, където m е реален параметър. Намерете стойностите на m, за които:

а) уравнението $f(x)=0$ има реални корени x_1 и x_2, за които $\left|x_1-x_2\right| \leq 1$.

3 т.

б) неравенството $f(x) \geq 0$ е изпълнено за всяко цяло число x. 4 т.

а) Намерено:

уравнението има реални корени, ако $D \geq 0$, т.е. при $m \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; +\infty\right)$;

1 т.

$\left|x_1-x_2\right| \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-8} \leq 1$; 0,5 т.

$\Leftrightarrow m \in \left[-\dfrac{\sqrt{33}}{2}; \dfrac{\sqrt{33}}{2}\right]$; 1 т.

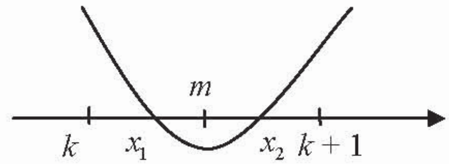
сечението $m \in \left[-\dfrac{\sqrt{33}}{2}; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{33}}{2}\right]$. 0,5 т.

б) Разгледан случая $D \le 0 \Leftrightarrow m \in \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$. 1 т.

При $D > 0$ направени:

извод, че $\left|x_1 - x_2\right| \le 1 \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{\sqrt{33}}{2}; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{33}}{2}\right]$ е необходимо условие неравенството $f(x) \ge 0$ да е изпълнено за всяко цяло число x; 0,5 т.

извод, че за да е изпълнено неравенството за всяко цяло число x, параболата трябва да е разположена, както е показано на чертежа. 0,5 т.



Разгледан случая $m \in \left[2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{33}}{2}\right]$: Тъй като $2 < m < 3$ и $f(2) = 12 - 4m > 0$, то на чертежа трябва k да е равно на 2. Следователно достатъчно е да е изпълнено $f(3) = 17 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{17}{6}$, т.е. $m \in \left[2\sqrt{2}; \frac{17}{6}\right]$. 1 т.

Аналогично при $m \in \left[-\frac{\sqrt{33}}{2}; -2\sqrt{2}\right]$ получено, че $m \in \left[-\frac{17}{6}; -2\sqrt{2}\right]$. 0,5 т.

Краен извод $m \in \left[-\frac{17}{6}; \frac{17}{6}\right]$. 0,5 т.