ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12. 02. 2011г.

Критерии за оценяване на задачите – 11 клас

Зад.1. - Намерена стойността на x = 2 - 2 точки

- Направено полагане (напр. $3^{x^2+x-8}=y$) и решаване на показателното уравнение или чрез еквивалентни преобразувания до получаване на уравнението $x^2+x-8=4$ - 1 точка
- Решаване на уравнението и намиране на корените $x_1 = -4$ и $x_2 = 3$ - 1 точка
- Съставяне на геометричната прогресия и образуване на уравнението $(y-4)^2=2(2y-2)$ - 1 точка
- Решаване на уравнението и намиране на корените $y_1 = 10$ и $y_2 = 2$ - 1точка
- Намиране на числата x = 2; y = 10; z = 18 - 0,5 точки
- или x = 2; y = 2; z = 2 - 0,5 точки

Зад.2. А) Образуване на уравнението $\cos^2 x+3\sin x-1=0$ и преобразуване до $\sin^2 x-3\sin x=0$ - 1 точка
- разлагане и намиране на корените 0 и 3 - 1 точка
- намиране на решението x = к π и установяване, че $\sin x=3$ няма решение - 1 точка

Б) Получено уравнение $m\sin^2 x-3\sin x+m-1=0$ - 1 точка
- направено полагане $\sin x=y$ и установяване, че за да има решение уравнението е необходимо $y\in[-1;1]$ -0,5 точки

Ако $f(y)=my^2-3y+m-1$, то за да има решение даденото уравнение е необходимо и достатъчно поне един от корените на уравнението $f(y)=0$ да е в интервала $[-1;1]$
- Изследване на случая m = 0 и установяване, че има решение - 0,5 точки
- Образуване на системите от ДУ

$$\left|\begin{array}{l} D\geq 0 \\ m.f(-1)\geq 0 \\ m.f(1)\geq 0 \\ -1<\dfrac{3}{2m}<1 \\ m\neq 0 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left|\begin{array}{l} f(-1).f(1)\leq 0 \\ m\neq 0 \end{array}\right.$$

и решаването им -1,5 точки

(за първата система – 1 точка , а за втората -0,5 точки)

Решението на първата система е $m\in[-1;0)\cup(0;2]$, а на втората е $m\in\left[2;\dfrac{1+\sqrt{10}}{2}\right]$

- Обединяване на решенията и намиране на отговора $m\in\left[-1;\dfrac{1+\sqrt{10}}{2}\right]$ -0,5 точки

Зад.3. Определяне, че ΔAKM и ΔBLM са равнострании -1 точка
Извод, че $KM = AM$, $ML = BM$ и $KM + ML = a$ ($KM = x$, $ML = y$) -0,5 точки

Извод, че $\measuredangle KML = 60°$ - 0,5 точки

Определяне лицето на ΔKLM : $S = \frac{1}{2} KM.ML.\sin 60° = \frac{1}{4} xy\sqrt{3}$ - 1 точка

Прилагане на косинусова теорема на ΔKLM :

$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60°$ - 2 точки

$d^2 = (x+y)^2 - 2xy - 2xy\frac{1}{2}$

Определяне на $xy = \frac{a^2 - d^2}{3}$ - 1 точка

Определяне на $S = \frac{1}{4} xy\sqrt{3} = \frac{\left(a^2 - d^2\right)\sqrt{3}}{12}$ - 1 точка

Забележка: При наличието на различни от представените решения, оценителите изготвят съответните критерии.