МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Перник
Ул. „Св. Св. Кирил и Методий" №11, ☎076-60-48-30

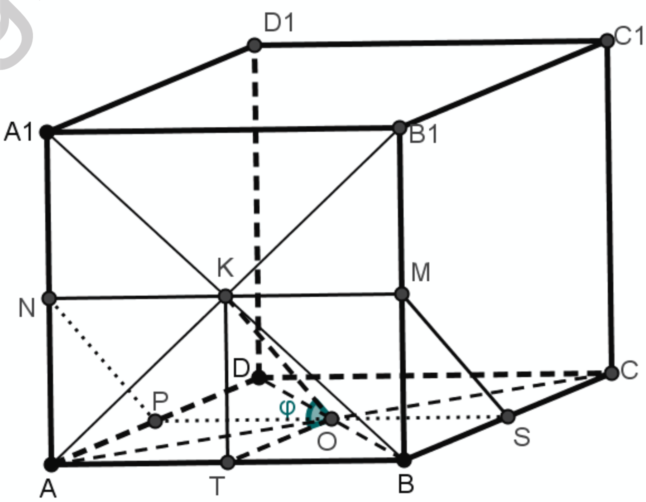
XII клас

Зад.1 Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб a. Точките K и O са центровете съответно на стените ABB_1A_1 и $ABCD$, а точка M е среда на ръба BB_1.
а) Да се намери сечението на куба с равнината KOM.
б) Ако точките P, S и N са средите съответно на ръбовете AD, BC и AA_1 да се намери лицето на четириъгълник $PSMN$ и тангенса на ъгъла φ между равнините $PSMN$ и $ABCD$.
в) В какво отношение равнината $PSMN$ дели обема на куба?
7 точки

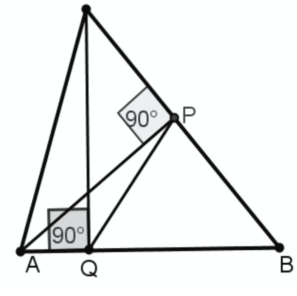
Зад.2 В остроъгълния триъгълник ABC отсечките AP и CQ (точка $P \in BC$ и $Q \in AB$) са височини. Да се намери лицето на четириъгълника $AQPC$, ако $AC=6$, $S_{\Delta BPQ}=1$ м.ед^2 и радиуса на окръжността, описана около ΔABC е равен на $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. **7 точки**

Зад.3 Дадена е функцията $f(x)=x+\dfrac{2}{x-1}$
а) Да се намерят локалните екстремуми на $f(x)$.
б) Да се намери най-малката стойност на функцията $|f(x)|$ в интервала $[-a;a]$, където $a>0$ е константа
в) Да се докаже, че за всяка допустима стойност на α е изпълнено:
$$\left|\sin\alpha+\cos\alpha+tg\alpha+\cot g\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right| \ge 2\sqrt{2}-1$$

7 точки



Зад.1
а) За аргументи, че равнината KOM е инцидентна с равнината на четириъгълника $PSMN$ **(2 точки).**
б) За аргументиране, че $PSMN$ е правоъгълник **(1 точка)** и за пресмятане на $S_{PSMN}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **(1 точка)**. За определяне на ъгъл φ и доказателство, че ΔKTO е равнобедрен правоъгълен $\Rightarrow$ $tg\varphi=tg45^0=1$ **(1 точка).**
в) За пресмятане обема на призмата $BSMAPN$ $V_{BSMAPN}=\dfrac{a^3}{8}$ **(1 точка**). И за определяне на отношението 1:8 **(1 точка).**



Зад.2 а) За доказателство, че $\Delta ABC \sim \Delta PBQ$ **(2 точки)** $\Rightarrow$ $\dfrac{PQ}{AC}=\dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{PB}{AB}$, но от правоъгълните триъгълници BQC и ABP $\Rightarrow$ $\dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{PB}{AB}=\cos\beta$ **(2 точки**). По синусова теорема за ΔABC $\Rightarrow$ $\dfrac{AC}{\sin\beta}=2R \Rightarrow \sin\beta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **(1 точка).** От $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1 \Rightarrow \cos\beta=\dfrac{1}{3}$ **(1**

точка). $\Rightarrow \dfrac{PQ}{AC}=\dfrac{1}{3}$ и от $\dfrac{PQ^2}{AC^2}=\dfrac{S_{BPQ}}{S_{ABC}}=\dfrac{1}{9}\Rightarrow S_{ABC}=9\Rightarrow S_{AQPC}=8$ **(1 точка).**

<u>Зад.3</u> а) За получаване на $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ **(1 точка).** За определяне $f_{\max}(x)=f(1-\sqrt{2})=1-2\sqrt{2}$ и $f_{\min}(x)=f(1+\sqrt{2})=1+2\sqrt{2}$ **(по 0,5=1точка)**

б) За намиране $Min|f(x)|=|f_{\max}(x)|=2\sqrt{2}-1$ за всяко x **(0,5 точка).**

При $x\in[-a;a]$ $\operatorname{Min}|f(x)|=|f_{\max}(x)|=2\sqrt{2}-1$**, а това е изпълнено при** $-a\le 1-\sqrt{2}$**, т.е. при** $a\ge\sqrt{2}-1$ **(0,5 точка)**

За $a\in(0;\sqrt{2}-1)\Rightarrow Min|f(x)|=|f(-a)|=-\dfrac{a^2+a+2}{a+1}$, тъй като за $x\in\left(1-\sqrt{2};1\right)$ $|f(x)|$ **е растяща функция (1 точка)**

в) Представяме израза:

$$\left|\sin\alpha+\cos\alpha+tg\alpha+\cot g\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right|=$$

$$=\left|\frac{\sin^2\alpha.\cos\alpha+\sin a\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right|=$$

$$=\left|\frac{\sin\alpha.\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+1+\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right|$$

Полагаме $\sin x+\cos x=x$ $\Rightarrow$ че изразът има вида:

$\left|\dfrac{x^2-x+2}{x-1}\right|$ и за всяко α $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, **(2точки)**

И от б) $\Rightarrow Min|f(x)|=2\sqrt{2}-1$

$$\left|\sin\alpha+\cos\alpha+tg\alpha+\cot g\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right|\ge 2\sqrt{2}-1$$

(1 точка)