

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12. 02. 2011 г.

XII клас

Зад.1 Даден е куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ръб a . Точките K и O са центровете съответно на стените $ABB_1 A_1$ и $ABCD$, а точка M е среда на ръба BB_1 .

а) Да се намери сечението на куба с равнината KOM .

б) Ако точките P , S и N са средите съответно на ръбовете AD , BC и AA_1 да се намери лицето на четириъгълник $PSMN$ и тангенса на ъгъла φ между равнините $PSMN$ и $ABCD$.

в) В какво отношение равнината $PSMN$ дели обема на куба?

7 точки

Зад.2 В остроъгълния триъгълник ABC отсечките AP и CQ (точка $P \in BC$ и $Q \in AB$) са височини. Да се намери лицето на четириъгълника $AQPC$, ако $AC=6$, $S_{\Delta BPQ} = 1$ м.ед² и радиуса на окръжността, описана около ΔABC е равен на $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

7 точки

Зад.3 Дадена е функцията $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$

а) Да се намерят локалните екстремуми на $f(x)$.

б) Да се намери най-малката стойност на функцията $|f(x)|$ в интервала $[-a; a]$, където $a > 0$ е константа

в) Да се докаже, че за всяка допустима стойност на α е изпълнено:

$$\left| \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right| \geq 2\sqrt{2} - 1$$

7 точки

Време за работа – 4 часа.

Желаем Ви успех!