

**60<sup>-та</sup> НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА**  
**ОБЩНСКИ КРЪГ**  
**12.02.2011г.**

**ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА**

**IX клас**

- 1зад. а)** За съставяне на системата 
$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 \\ x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$
 **1 точка**
- За намиране на  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$  **1 точка**
- За намиране на  $p = \pm \frac{5}{2}$  **1 точка**
- б)** За полагане  $x^2 + 11 = y$  **0,5 точки**
- За решаване на уравнението  $\sqrt{y} = 42 - y$  и намиране решението  $y = 36$  (изключване на  $y = 49$ ) **2,5 точки**
- За намиране  $x = \pm 5$  **1 точка**

**2зад. а)**  $A = \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} \cdot |x - 3|$ . Разлагаме числителя на произведение от множители:

$$x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3 - 1) = (x-1)^2(x^2 + x + 1) \quad (1 \text{ точка}).$$

За разлагането на знаменателя:

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = x^3 - 5x^2 + 5x + 2x - 3 = x^3 - 5x(x-1) + 2x - 2 - 1 = (x^3 - 1) - 5x(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 1 - 5x + 2) = (x-1)(x^2 - 4x + 3) = (x-1)^2(x-3) \quad (1 \text{ точка})$$

$$\Rightarrow A = \frac{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2(x-3)} \cdot |x-3| = \frac{(x^2 + x + 1)|x-3|}{x-3} \Rightarrow$$

$$\text{за } x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \Rightarrow A = \frac{(x^2 + x + 1)(3-x)}{x-3} = -x^2 - x - 1 \quad (0,5 \text{ точки}), \text{ а за}$$

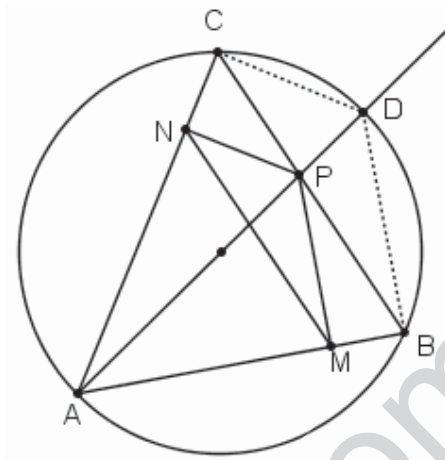
$$x \in (3; +\infty) \Rightarrow A = \frac{(x^2 + x + 1)(x-3)}{x-3} = x^2 + x + 1 \quad (0,5 \text{ точки}).$$

$$\text{б) } B = \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}-1} \quad (2 \text{ точки})$$

Определяне дефиниционното множество на израза  $D: x \geq 1, x \neq 2$  **(1 точка)**

За  $x \in [1; 2) \Rightarrow B = -1$  **(0,5 точка)** и за  $x \in (2; +\infty) \Rightarrow B = 1$  **(0,5 точка)**

**Зад.** Тъй като  $AD$  е диаметър на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност  $\Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 90^\circ$  **(2 точки)**. От свойството на вписаните ъгли имаме, че  $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CBA$  **(1 точка)**.  $DC$  и  $PN$  са  $\perp AC \Rightarrow DC \parallel PN \Rightarrow$  че  $\sphericalangle CDP = \sphericalangle NPA$  като съответни ъгли  $\Rightarrow \sphericalangle CBA = \sphericalangle NPA$  **(1 точка)**. Но от  $\sphericalangle AMP = \sphericalangle ANP = 90^\circ \Rightarrow$  че около четириъгълник  $AMPN$  може да се опише окръжност с диаметър  $AP$  и тогава  $\sphericalangle NPA = \sphericalangle NMA$ . Следователно  $\sphericalangle CBA = \sphericalangle NPA = \sphericalangle NMA$  **(1 точка)**. И така получаваме, че:  $\sphericalangle CBA = \sphericalangle NMA$ , но това са съответни ъгли, получени при  $(BC \text{ и } MN) \cap AB \Rightarrow BC \parallel MN$  **(1 точка)** и тъй като точките  $M$  и  $N$  лежат на страните на  $\triangle ABC \Rightarrow BM \parallel NC \Rightarrow$  четириъгълникът  $MBCN$  е трапец **(1 точка)**.



math-bg.com