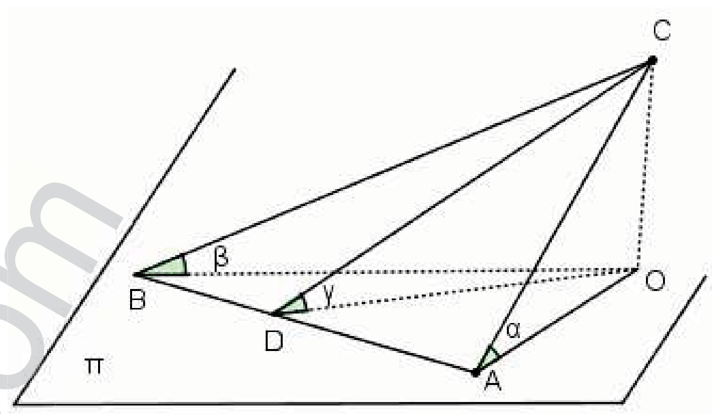
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Ловеч
ул. “Търговска” 43, ет.10, ☎ (068) 603806, факс (068) 603807
http://rio-lovech.hit.bg e-mail: rio_lovech@yahoo.com

60-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
12.02.2011г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА
XII клас

1зад.



Нека т. O е ортогоналната проекция на върха C в равнината π. Тогава $\measuredangle OAC=\alpha$ и $\measuredangle OBC=\beta$ **(1 точка).** Прекарваме $CD\perp AB$ равнината (ABC), откъдето по теорема за трите перпендикуляра $\Rightarrow$ $OD\perp AB$ $\Rightarrow \measuredangle ODC=\gamma$ е търсеният двустенен ъгъл **(2 точки).**
Да означим $OC=x$. От правоъгълните триъгълници OAC и OBC $\Rightarrow$ $AC=\dfrac{x}{\sin\alpha}$ и $BC=\dfrac{x}{\sin\beta}$ **(1 точка).**

По теорема на Питагор за ΔABC $\Rightarrow AB=\sqrt{AC^2+BC^2} \Rightarrow AB=\dfrac{x}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ **(1 точка**).

Тогава за $\Delta ABC \Rightarrow AB.DC=BC.AC \Rightarrow DC=\dfrac{x}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}$ **(1 точка).**

От ΔDOC намираме $\sin\gamma=\dfrac{OC}{DC}=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ **(1 точка**).

2зад. а) При a=1 решаваме уравнението $2^{2\cos x}-3.2^{\cos x}+2=0$. Полагаме $2^{\cos x}=y$ $\Rightarrow$ трябва да решим уравнението $y^2-3y+2=0$ $y_{1;2}=2;1$ **(1 точка**). От уравнението $2^{\cos x}=2 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi$, от $2^{\cos x}=1 \Rightarrow$ $\cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ **(по 0,5 точки за всеки от корените**).

б) $2^{2\cos x}-3a.2^{\cos x}+2a^2=0$. Полагаме $2^{\cos x}=y$ $\Rightarrow$ трябва да решим уравнението $y^2-3ay+2a^2=0 \Rightarrow D=a^2$ $y_{1;2}=2a;a$ **(1 точка).** От неравенствата $-1\le\cos x\le 1$ $\Rightarrow 2^{-1}\le 2^{\cos x}\le 2$ **(0,5 точки)** $\Rightarrow \dfrac{1}{2}\le a\le 2$ или $\dfrac{1}{2}\le 2a\le 2 \Rightarrow a\in\left[\dfrac{1}{4};2\right]$ **(0,5 точки**).

в) Полагаме $2^{\cos x}=y \Rightarrow$ **задачата за намиране на най-малка стойност и най-голяма стойност на функцията** $f(x)=2^{2\cos x}-3a.2^{\cos x}+2a^2$ **се свежда до намиране на тези**

стойности за функцията $g(y)=y^2-3ay+2a^2$ за $y\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ **(1 точка).** $y'=2y-3a\Rightarrow$ при $y=\frac{3a}{2}$, функцията $g(y)=y^2-3ay+2a^2$ има локален екстремум и той е минимум.

1) Нека $y=\frac{3a}{2}\le\frac{1}{2}$ (т.е. $a\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$), тогава при $y>\frac{3a}{2}$, $g(y)$ е растяща функция и $f_{\min}=g_{\min}(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{3a}{2}+2a^2$, а $f_{\max}=g_{\max}(2)=4-6a+2a^2$ **(0,5 точка).**

2) Нека $\frac{1}{2}<y=\frac{3a}{2}<2$ (т.е. $a\in\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$), тогава при $y>\frac{3a}{2}$, $g(y)$ е растяща функция, а при $y<\frac{3a}{2}$, $g(y)$ е намаляваща функция и $f_{\min}=g_{\min}(\frac{3a}{2})=-\frac{a^2}{4}$, а $f_{\max}=\max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right);g(2)\right\}$.
$g\left(\frac{1}{2}\right)-g(2)=\frac{18a-15}{4}\Rightarrow a\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)\Rightarrow f_{\max}=\max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right);g(2)\right\}=g(2)$, а при $a\in\left(\frac{5}{6};\frac{4}{3}\right)$ $\Rightarrow f_{\max}=\max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right);g(2)\right\}=g\left(\frac{1}{2}\right)$ и при $a=\frac{5}{6}\Rightarrow f_{\max}=\max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right);g(2)\right\}=g(2)=g\left(\frac{1}{2}\right)$ **(1 точка).**

3) Нека $y=\frac{3a}{2}\ge 2$ (т.е. $a\in\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$), тогава при $y<\frac{3a}{2}$, $g(y)$ е намаляваща функция и $f_{\min}=g_{\min}(2)=4-6a+2a^2$, а $f_{\max}=g_{\max}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}a+2a^2$ **(0,5 точка).**

3зад. Да означим катетите *AC*=*b* и *BC*=*a* и нека ∡*AGB*=*φ*. От $S_{ABG}=\frac{1}{3}S_{ABC}$ **(1 точка)** $\Rightarrow\frac{1}{3}.\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}m_a.\frac{2}{3}m_b\sin\varphi$ $\Rightarrow$ $4m_am_b\sin\varphi=3ab$. Изразяваме медианите $m_a=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$ и $m_b=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$ **(1 точка)**$\Rightarrow$ $\sin^2\varphi=\frac{9a^2b^2}{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}$ **(0,5 точка).**

Пресмятаме и $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi=\frac{4(a^4+2a^2b^2+b^4)}{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}$ **(0,5 точка)**

$\Rightarrow ctg^2\varphi=\frac{4(a^4+4a^2b^2+b^4)}{9a^2b^2}$ **(1 точка)**

Представяме $ctg^2\varphi=\frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\right)$. Тъй като ∡*AGB*=*φ*>90°, то $ctg\varphi<0\Rightarrow ctg\varphi$ ще е най-голям, когато $ctg^2\varphi$ е най-малък, така че търсим най-малката стойност на израза: $\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}$ **(1 точка).**

От основно неравенство $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\ge 2$ **(1 точка)** $\Rightarrow$ че изразът е най-малък при $\frac{a}{b}=1$ **(0,5 точка)** $\Rightarrow ctg^2\varphi=\frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{16}{9}$, а $ctg\varphi=-\frac{4}{3}$ **(0,5 точка)**