МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Ловеч
ул. "Търговска" 43, ет.10, ☎ (068) 603806, факс (068) 603807
http://rio-lovech.hit.bg e-mail: rio_lovech@yahoo.com

60-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ
12.02.2011г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА
XI клас

Зад.1 а) От свойство на аритметичната прогресия =>

2. $\lg(1-a) = 1 + \lg\dfrac{a^2-2a+1}{1+a^2}$

Д.М. a<1 **(1 т.)**

$\lg(1-a)^2 = \lg\dfrac{10.(1-a)^2}{1+a^2}$ **(1 т.)**

$(1-a)^2 = \dfrac{10.(1-a)^2}{1+a^2}$ **(1 т.)**

$(1-a)^2.\left(1-\dfrac{10.}{1+a^2}\right) = 0$

$(1-a)^2.\left(1-\dfrac{10.}{1+a^2}\right) = 0$, $a \neq 1$ => $1+a^2-10=0$

$a = \pm 3$, $a = -3 \in$ Д.М. **(1 т.)**

б) за a=-3 уравнението добива вида: $-5.4^x - 11.10^x = -16.25^x$

$5.2^{2x} + 11.2^x 5^x = 16.5^{2x}$ **(0,5 т.)**

$5.\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2x} + 11.\left(\dfrac{2}{5}\right)^x - 16 = 0$ **(1 т.)**

Полагаме $.\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = t$ **(0,5 т.)**

За намиране на корените на квадратното уравнение $5.t^2 + 11.t - 16 = 0$
t_1=1 и t_2=-3,2 **(0,5 т.)**
За намиране на x=0 **(0,5 т.)**

Зад.2 а) $2^{\log_2\left(\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}4\right)}$ **=** $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}^4$ **=** $\dfrac{1}{2}.4 = 2$ **(0,5 точка).**

$\sin 15^0.\sin 75^0 = \sin(90^0 - 75^0).\sin 75^0 = \cos 75^0.\sin 75^0 = \dfrac{1}{2}\sin 150^0 = \dfrac{1}{4}$ **(0,5 точка).**

$\left(\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{-4}.\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^4\right)^2 = \left((2^{\frac{1}{4}})^{-4}.\left(2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}\right)^4\right)^2 = \left(2^{-1}.2^2.2\right)^2 = 16$ **(0,5 точка)**

⇒ числата $\dfrac{1}{4}$; 2; 16 образуват растяща геометрична прогресия, защото $2^2 = \dfrac{1}{4}.16$ и

$a_5 = \dfrac{1}{4}.8^4 = \dfrac{2^{12}}{2^2}$ $=2^{10}$=1024 **(0,5 точки)** и числата 16; 2; $\frac{1}{4}$ образуват намаляваща геометрична прогресия $\Rightarrow a_5 = 16.\left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{2^4}{2^{12}} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$ **(1 точка)**

б) Полагаме $3^x = y$ и показателното уравнение $(a-1).3^{2x+1} - (4a+2).3^x + 2 - a = 0$ свеждаме до квадратното $3(a-1)y^2 - 2(2a+1)y + 2 - a = 0$ **(0,5 точка)**. От условието, че искаме произведението от корените $x_1x_2 < 0$ $\Rightarrow$ че корените са с различни знаци и нека $x_1 < 0, x_2 > 0$, а от това следва, че $0 < 3^{x_1} < 1$, а $3^{x_2} > 1$ **(2 точки).** Така можем да преформулираме задачата до: да се намерят всички стойности на реалния параметър *a*, за които уравнението $3(a-1)y^2 - 2(2a+1)y + 2 - a = 0$ има два реални корена, единият от които е положителен, но по малък от 1, а другият по-голям от 1. Отговор на този въпрос ни дава системата: $\left|\begin{array}{l}(a-1)f(0) > 0\\(a-1)f(1) < 0\end{array}\right.$ **(1точка)** $\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(a-1)(2-a) > 0\\(a-1)(-2a-3) < 0\end{array}\right. \Rightarrow a \in (1;2)$ **(0,5 точка).**

Зад.3 Означаваме *AB*=*c*, *BC*=*a*, *AC*=*b* *AM*=m_a.
От формулата за медианата $4m_a^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$ и условието, че $m_a : a = \sqrt{13} : 2$
$\Rightarrow 4\frac{m_a^2}{a^2} = 2\frac{c^2}{a^2} + 2\frac{b^2}{a^2} - 1 \Rightarrow c^2 + b^2 = 7a^2$ **(2 точки).**
От косинусова теорема за ΔABC имаме $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos 30^0$ и като заместим $c^2 + b^2 = 7a^2$ получаваме, че: $bc\sqrt{3} = 6a^2$ **(1точка).**
От двете уравнения на системата: $\left|\begin{array}{l}c^2 + b^2 = 7a^2\\bc\sqrt{3} = 6a^2\end{array}\right.$ можем да изразим:
$b + c = a\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = a\sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = a(2+\sqrt{3})$ и аналогично
$b - c = a\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = a\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = a(2-\sqrt{3})$ **(2 точки)**,
откъдето изразяваме: $b = 2a$ и $c = \sqrt{3}x$ **(1 точка).**
От където следва, че $b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow \Delta ABC$ е правоъгълен (с прав ъгъл при върха *B*), а $\measuredangle ACB = 60^o$ **(1точка).**