

60-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩНСКИ КРЪГ
12.02.2011г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА
X клас

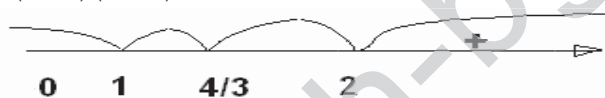
1зад. а) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} =$ **1 m.**
 $= \sqrt[3]{8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}} =$
 $= \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} =$ **1 m.**
 $= 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$ **1 m.**

б) $\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}$ Полагаме $2^x = y$ **1 m.**

$$\frac{1}{y-1} > \frac{1}{1-y \cdot 2^{-1}}$$

$$\frac{1}{y-1} - \frac{2}{2-y} > 0$$
 1 m.

$$\frac{4-3y}{(y-1)(2-y)} > 0 \quad y \neq 1; \quad y \neq 2$$



$$1 < y < \frac{4}{3} \quad y > 2$$
 1 m.

$$1 < 2^x < \frac{4}{3} \quad 2^x > 2^1 \quad x > 1$$

$$x \in \left(0; \log_2 \frac{4}{3}\right) \cup (1; +\infty)$$
 1 m.

2зад. а) $D \geq 0$

За намиране на $D = k^2 + 8k + 16 - 4(k-1)(2k+5) = -7k^2 - 4k + 36$ **1 m.**

За намиране на $k_1 = 2$ и $k_2 = -\frac{18}{7}$ **1 m.**

За определяне на $k \in \left[-\frac{18}{7}; 2\right]$ и $k \neq 1$ **1 m.**

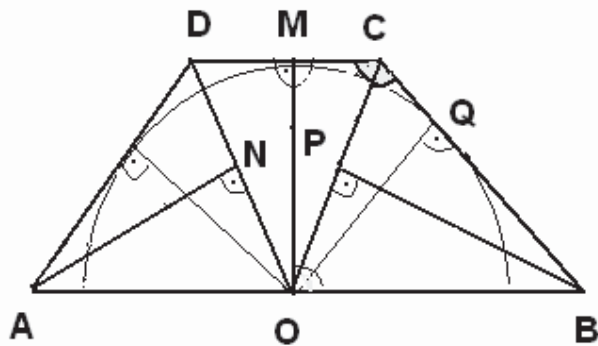
За определяне на $k \in \left[-\frac{18}{7}; 1\right) \cup (1; 2]$

1 m.

б) $f(x) > 0$ за всяко x когато $a > 0$ $D < 0$

$$\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k - 1 > 0 \\ 7k^2 + 4k - 36 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \in \left(-\infty; -\frac{18}{7}\right) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow k \in (2; +\infty) \quad \mathbf{3\ m.}$$

Задан



За чертеж

0,5 m.

$OM \perp CD$

$$\triangle OMC \quad MC^2 = OC^2 - OM^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \text{ cm} \quad MC = 5 \text{ cm}$$

$$\triangle OMD \quad MD^2 = OD^2 - OM^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \text{ cm} \quad MD = 9 \text{ cm}$$

$$\triangle OCM \cong \triangle OCQ \quad \angle OCM = \angle OCQ = \alpha \quad \angle OCM = \angle BOC = \alpha$$

$\Rightarrow \triangle OBC$ - равнобедрен $\Rightarrow OB = BC$

2 m.

Аналог. $AO = AD$

0,5 m.

Постр. $BP \perp OC$ и $AN \perp OD$

$$\triangle OBP \text{ е подобен на } \triangle COM \Rightarrow \frac{BO}{CO} = \frac{OP}{MC} \Rightarrow \frac{BO}{13} = \frac{6,5}{5} \Rightarrow$$

$$BO = 16,9 \text{ cm} = BC$$

2 m.

Аналог. $AO = 12,5 \text{ cm} = AD$

0,5 m.

$$\Rightarrow P_{ABCD} = 72,8 \text{ cm}$$

0,5 m.