

Национална олимпиада по математика  
Общински кръг – 12 февруари 2011 год.

ТЕМА ЗА XII КЛАС

**Задача 1.** а) Да се реши уравнението  $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$  (3 точки)

б) Да се реши системата 
$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$$
 (4 точки)

**Задача 2.** Дадена е функцията  $f(x) = \frac{x^3}{3} + (p-2)x^2 + (2p-1)x + 4(p^2 - 10p + 27)$ .

Да се намерят стойностите на параметъра  $p$ , за които:

а) графиката на функцията  $f(x)$  минава през точка  $M(-3; 0)$ ;

б) допирателната към графиката на функцията  $f(x)$  в точка  $M(-3; 0)$  сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл с мярка  $135^\circ$ ;

в) функцията  $f(x)$  е растяща за всяко  $x$ , по-голямо от 4.

Има ли стойности на параметъра  $p$ , за които функцията  $f(x)$  удовлетворява и трите условия?

(7 точки)

**Задача 3.** Дадена е четириъгълна пирамида с връх  $M$  и основа квадрат  $ABCD$ . Околният ръб  $AM$  е перпендикулярен на равнината на основата. Ако  $AM = 1$ ,  $BM = \sqrt{2}$ , да се намери:

а) околната повърхнина на пирамидата и разстоянието от точката  $A$  до равнината  $(MBD)$ ;

б) радиусът на описаната около пирамидата сфера.

(7 точки)

Време за работа : 4 астрономически часа

Желаем Ви успех!