

Национална олимпиада по математика
Общински кръг – 12 февруари 2011 год.

ТЕМА ЗА XI КЛАС

Задача 1. Три числа x , y и z образуват аритметична прогресия. Ако към второто число прибавим по-малкия корен на уравнението $3^{x^2+4x+2} - 8 \cdot 3^{x^2+4x} = 1$, ще се получат три числа, които образуват геометрична прогресия. Да се намерят числата x , y и z , ако $x = \frac{3^{3 \log_3 \sqrt{6}} + 81^{\log_3 5} (5^{3 \log_3 \sqrt{6}} - 7^{\log_7 25})}{409} - \log_2 \frac{1}{8}$.

(7 точки)

Задача 2. а) Да се реши неравенството $\log_{4x^2} (5x+6) > 1$

(4 точки)

б) Докажете тъждеството:

$$\frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \cot g \frac{15}{2} \alpha$$

(3 точки)

Задача 3. В ΔABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) $AC < BC$ и $AC = 2a$.

а) Ако окръжност с диаметър катета AC пресича ъглополовящата AL на $\sphericalangle CAB$ в точка P и $AP : PL = 3 : 1$, да се намерят острите ъгли на триъгълника.

б) Права, минаваща през върха C , сключва ъгъл α с катета AC и отсича от хипотенузата отсечка с дължина, равна на $\frac{2}{7}$ от дължината на хипотенузата, считано от върха A . Да се намери лицето на ΔABC .

(7 точки)

Време за работа : 4 астрономически часа

Желаем Ви успех!