КРАТКИ РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

12. клас

1. а) Пресметнете стойността на израза

$$A = 5^{\log_{0,2}\frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right).$$ **3 точки**

б) Намерете двойките числа $(x;\ y)$, за които е изпълнено равенството $\left(\log_3 5\right)^{\sqrt{x-2y+1}} = \left(\log_5 3\right)^{\sqrt{x^2-y^2+5y-3}}$. **4 точки**

а) За намерено $5^{\log_{0,2}\frac{1}{2}} = 2$ 1 точка

и $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)+\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)=3$ 2 точки

б) $\left(\log_3 5\right)^{\sqrt{x-2y+1}} = \left(\log_5 3\right)^{\sqrt{x^2-y^2+5y-3}} \Leftrightarrow \left(\log_3 5\right)^{\sqrt{x-2y+1}} = \left(\log_3 5\right)^{-\sqrt{x^2-y^2+5y-3}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x-2y+1} = -\sqrt{x^2-y^2+5y-3}$ 1 точка

Но $\sqrt{x-2y+1} \geq 0$ и $-\sqrt{x^2-y^2+5y-3} \leq 0$. Следователно уравнението е еквивалентно на

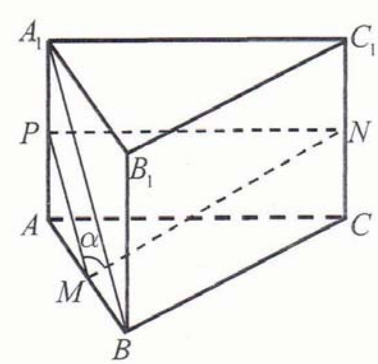
системата $\begin{vmatrix} x-2y+1=0 \\ x^2-y^2+5y-3=0 \end{vmatrix}.$ 1 точка

За намерени решенията на системата $(-3;-1)$ и $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. 2 точки

2. Всички ръбове на правилната триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ имат дължина 1. Точките M и N са средите съответно на ръбовете AB и CC_1. Намерете:

а) дължината на отсечката MN и косинуса на ъгъла между правите MN и BA_1; **3 точки**

б) разстоянието от точка A_1 до равнината (B_1MN). **4 точки**

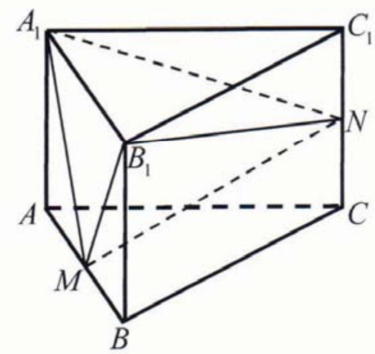


а) От правоъгълния $\triangle MNC \Rightarrow MN = \sqrt{MC^2+NC^2} = 1$ 1 точка

$\measuredangle PMN = \measuredangle(BA_1; MN) = \alpha$, където $MP \parallel BA_1$ 1 точка

$MP=\frac{1}{2}A_1B=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $PN=1$ и от $\triangle MNP$ по косинусова теорема намираме, че

$\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 1 точка



б) Ако $A_1H\perp(B_1MN), H\in(B_1MN)$ и

$NQ\perp(ABB_1), Q\in(ABB_1)$, то

$V_{MNB_1A_1}=\frac{1}{3}S_{MNB_1}.A_1H=\frac{1}{3}S_{A_1B_1M}.NQ$ 1 точка

$A_1M=MB_1=B_1N, MN=A_1B_1=1$ 1 точка

$\Rightarrow\triangle MNB_1\cong\triangle A_1B_1M\Rightarrow A_1H=NQ$ 1 точка

$CC_1\parallel(ABB_1)\Rightarrow NQ=CM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1 точка

3. Дадена е функцията $f(x)=(-2x-2)^{\frac{1}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}$.

а) Намерете най-малката стойност на функцията; 3 точки

б) За кои стойности на параметъра a уравнението $(-2x-2)^{\frac{1}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}=a$ има единствено решение? 4 точки

а) Дефиниционното множество на функцията е $x\in[-1;+\infty)$.

$f'(x)=\frac{1}{3}(-2x-2)^{-\frac{2}{3}}.(-2)+\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3(x+1)^{\frac{1}{6}}-2\sqrt[3]{2}}{6(x+1)^{\frac{2}{3}}}$. 1 точка

$f'(x)>0\Leftrightarrow(x+1)^{\frac{1}{6}}>\frac{2^{\frac{4}{3}}}{3}\Leftrightarrow x>\frac{2^8}{3^6}-1$. 1 точка

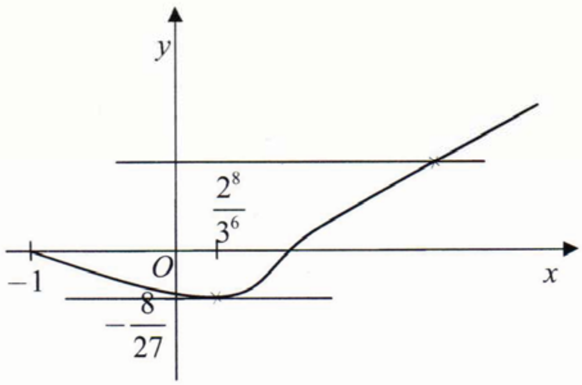
Следователно при $x\in\left[-1;\frac{2^8}{3^6}-1\right)$ функцията намалява, а при $x\in\left(\frac{2^8}{3^6}-1;+\infty\right)$, тя расте.

Следователно най-малката стойност на функцията е при $x=\frac{2^8}{3^6}-1$ и е равна на

$f\left(\frac{2^8}{3^6}-1\right)=-\frac{8}{27}$. 1 точка

б) Като използваме изследването на функцията от подточка а) и

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}\left(1-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{x+1}}\right) = +\infty,\ f(-1)=0$$ 1 точка



можем да заключим, че графиката на функцията ще изглежда приблизително, както е показано на чертежа: 1 точка

Следователно уравнението $f(x)=a$ ще има единствено решение при $a \in (0;+\infty)$ 1 точка

и $a = -\frac{8}{27}$. 1 точка