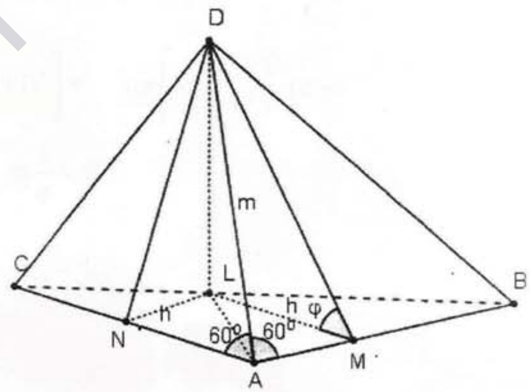
ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

XII клас

1зад. Доказал а) 5т б) 2т

2зад.

а) Нека проекцията на т.D в равнината (ABC) е т. L. От условието, че $(ABC)\perp(BCD)$ □ $DL\subset(BCD)$ и $DL\perp$ на всяка права от равнината (ABC). **1т.**



Нека $DM\perp AB$ (M□AB) в равнината (ABD), а $DN\perp AC$ (N□AC) в равнината (ACD) □ $\Delta ADN\cong\Delta ADM$ и нека означим $LN=LM=h$.

За пресмятане лицето на основата ABC по Херонова формула $B=\frac{3}{4}\sqrt{15}$ **1 т.**

От това, че $S_{ABC}=S_{ACL}+S_{ABL}=$

$=\frac{1}{2}CA.h+\frac{1}{2}BA.h=\frac{1}{2}.5.h$ □ $h=\frac{3\sqrt{15}}{10}$ **1т.**

Да означим околния ръб $AD=m$. От правоъгълния триъгълник ADM □$AM=\frac{1}{2}m$, а $DM=\frac{\sqrt{3}}{2}m$. От правоъгълен ΔDLM по теорема на Питагор □ $DL^2=\frac{15m^2-27}{20}$ **(1)**. AL е ъглополовяща в ΔABC □ $AL^2=AB.AC-CL.BL$, а от основно свойство на ъглополовящата □ $CL=\frac{12}{5}$ и $BL=\frac{8}{5}$ □ $AL=\frac{3\sqrt{6}}{5}$ **1 т.**

От друга страна от правоъгълен ΔADL по теорема на Питагор □$AL^2=\frac{5m^2+27}{20}$ □ $\frac{9.6}{25}=\frac{5m^2+27}{20}$ □$m=\frac{9}{5}$ **1т.** Сега вече можем да намерим височината на пирамидата, заместайки в (1) □$DL=\frac{3}{5}\sqrt{3}$, и за обема получаваме: $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}\sqrt{15}.\frac{3}{5}\sqrt{3}=\frac{9}{20}\sqrt{5}$. **1т.**

б) $\measuredangle((ABC);(ABD))=\measuredangle LMD$ **1т.**

От правоъгълен ΔLMD □ $tg\varphi=\frac{LD}{ML}$□ $tg\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **1т.**

3зад. 3 а) При *a*=6 получаваме неравенството: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6.6^x - 36^x\right) \ge -2$

□ $6.6^x - 6^{2x} \le \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$. **1т.**

полагаме $y = 6^x$ □ $y^2 - 6y + 5 \ge 0$ □ $y \in (0;1] \cup [5;6)$ (съобразено с ДС за *y*)
Окончателно $x \in (-\infty;0] \cup [\log_6 5;1)$ **1т.**

Б) Нека $m(a) = \min f(x) = \min\left(\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(a.6^x - 36^{2x}\right)\right)$. Тъй като основата на логаритъма е по-малка от 1 то $f(x)$ е намаляваща в множеството от ДС и ще има най-малка стойност когато функцията $g(x) = a.6^x - 36^x$ има максимална стойност. **1т.**

Да разгледаме функцията $g(t) = a.t - t^2$. Тя е растяща за $t < \frac{a}{2}$ и намаляваща при $t > \frac{a}{2}$ □ при $t = \frac{a}{2}$, $g(t) = a.t - t^2$ има максимум и $g_{\max}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$ **2 т.**

□ $m_{\min}\left(\frac{a}{2}\right) = \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{a^2}{4}$.

$$\lim_{a\to\infty}\left[\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{a^2}{4} + 4\log_5(a+1)\right] = \lim_{a\to\infty}\left[-2\log_5 \frac{a^2}{4} + \log_5 (a+1)^4\right] = \lim_{a\to\infty}\left[\log_5\left(\frac{4}{a^2}\right)^2 .(a+1)^4\right] =$$

$$\lim_{a\to\infty}\left[\log_5 16.\left(\frac{a+1}{a}\right)^4\right] = \lim_{a\to\infty}\left[\log_5 16.\left(1+\frac{1}{a}\right)^4\right]$$ и тъй като $\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a} = 0$

□ $\lim_{a\to\infty}\left[\log_5 16.\left(1+\frac{1}{a}\right)^4\right] = \log_5 16$ **2т.**