

Министерство на образованието и науката

57. Национална олимпиада по математика, Областен кръг

Тема за 11. клас

Втори ден, 20 април, 2008 г.

**Задача 4.** В окръжност с радиус  $R = 65$  е вписан четириъгълник  $ABCD$ , за който  $AB = 50$ ,  $BC = 104$  и  $CD = 120$ . Да се намери страната  $AD$ .

**Задача 5.** а) Дадена е редицата  $a_n = \sqrt[n]{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Да се докаже, че  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

б) Нека  $f(x)$  е полином, коефициентите на който са положителни реални числа. Да се докаже, че редицата  $b_n = \sqrt[n]{f(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  е сходяща и да се намери нейната граница.

**Задача 6.** Нека  $k$  е естествено число. Означаваме с  $f(k)$  най-голямото естествено число, за което съществува множество  $M$  от естествени числа с  $f(k)$  елемента, такова че:

1. Всеки елемент на  $M$  е делител на  $k$ .
2. Никой елемент на  $M$  не дели друг негов елемент.

Да се докаже, че ако  $m$  и  $n$  са взаимнопрости естествени числа, то

$$f(n \cdot 2^n) f(m \cdot 2^m) = f(mn 2^{m+n}).$$

*Всяка задача се оценява със 7 точки.*

*Време за работа 4 часа.*

*Пожелаваме Ви успех!*