

Министерство на образованието и науката

57. Национална олимпиада по математика, Областен кръг

Тема за 11. клас

Първи ден, 19 април, 2008 г.

Задача 1. Дадена е аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, за която е изпълнено $a_1 \cdot a_2 < 0$ и

$$(a_1 + a_2 + a_3) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) = -\frac{3}{8}.$$

Да се намери най-малкото естествено число $n > 2$, за което $\frac{a_n}{a_2}$ е точен квадрат на естествено число.

Задача 2. Във вътрешността на равностранен триъгълник ABC е избрана точка O . Симетричните точки на точка O спрямо страните BC , CA и AB са означени съответно с A_1 , B_1 и C_1 . Да се докаже, че правите AA_1 , BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.

Задача 3. Нека a и b са естествени числа. Да се докаже, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, зададена с равенствата $a_1 = a$ и $a_{n+1} = \varphi(a_n + b)$ $n \geq 1$ е ограничена.

(За едно естествено число k с $\varphi(k)$ означаваме броят на естествените числа, които са по-малки от k и са взаимнопрости с k .)

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!