



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ  
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

LVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА  
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 19 април 2008 г.

10 клас

Задача 1. Да се намерят всички реални стойности на  $x$ , за които са изпълнени неравенствата

$$1 \leq \sqrt{x+2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq 4.$$

Задача 2. Точките  $A$ ,  $B$  и  $C$  са разположени върху окръжност  $k$  така, че допирателните към  $k$  в точките  $A$  и  $B$  се пресичат в точка  $P$ , а  $C$  лежи на голямата дъга  $\widehat{AB}$ . Нека правата през  $C$ , която е перпендикулярна на  $PC$ , пресича правата  $AB$  в точка  $Q$ . Да се докаже, че:

- ако правите  $PC$  и  $QC$  пресичат  $k$  за втори път съответно в точките  $M$  и  $N$ , то  $\angle CQP = \angle CMN$ ;
- ако  $S$  е средата на  $PQ$ , то  $SC$  е допирателна към  $k$ .

Задача 3. Да се докаже, че съществува функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , удовлетворяваща равенството  $f(f(n)) = 3n$  за всяко  $n \in \mathbb{N}$ .

*Всяка задача се оценява със 7 точки.*

*Време за работа 4 часа.*

*Пожелаваме Ви успех!*