57. Републиканска олимпиада по математика
Областен кръг, 19-20.04.2008 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване на задачите за 9. клас

Задача 1. Да се намерят всички двойки цели числа (p, q), за които корените на уравнението

$$(px - q)^2 + (qx - p)^2 = x$$

са цели числа.

Решение. Записваме уравнението в нормален вид $(p^2+q^2)x^2-(4pq+1)x+p^2+q^2 = 0$. Едно решение на задачата е очевидното $(p, q) = (0, 0)$. Тогава уравнението има единствен корен $x = 0$, който е цяло число. Нека поне едно от числата p или q е различно от нула. Сега представяме уравнението във вида

$$x^2 - \frac{4pq+1}{p^2+q^2}x + 1 = 0.$$

От формулите на Виет следва, че числото $\frac{4pq+1}{p^2+q^2}$ трябва да е цяло и че в такъв случай корените на уравнението могат да са само $x_1 = x_2 = 1$ или $x_1 = x_2 = -1$. От равенствата $\frac{4pq+1}{p^2+q^2} = \pm 2$, получаваме $4pq + 1 = \pm 2(p^2 + q^2)$, което е невъзможно, защото лявата страна на равенството е нечетно число, а дясната е четно. Окончателно, единственото решение на задачата е $(p, q) = (0, 0)$.

Задача 2. Даден е ромб $ABCD$ със страна a. Върху правата AC са взети точки M и N, така че A лежи между M и C, а C лежи между A и N и $MA \cdot NC = a^2$. Означаваме с P пресечната точка на MD и BC, а с Q пресечната точка на ND и AB. Да се докаже, че D е център на вписаната окръжност за $\triangle PQB$.

Решение. Очевидно $\triangle ADM \sim \triangle CND$ (I признак). Следователно $\sphericalangle DNC = \sphericalangle MDA$. По-нататък $\triangle BCN \cong \triangle DCN$, откъдето $\sphericalangle DNC = \sphericalangle BNC$. Следователно точките M, B, N, P лежат на една окръжност. Аналогично, точките N, B, M, Q лежат на една окръжност. Оттук получаваме

$$\sphericalangle QPM = \sphericalangle QNM = \sphericalangle BNM = \sphericalangle BPM.$$

Следователно PD е ъглополовяща на $\sphericalangle QPB$ и тъй като BD е ъглополовяща на $\sphericalangle QBP$, то D е център на вписаната окръжност за $\triangle PQB$.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n с точно 8 естествени делителя, сборът на които е равен на 3780 (включително числото 1 и самото число n).

Решение. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, където $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ са различни прости числа и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ са цели неотрицателни числа. Броят на делителите на n е $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_k)$. Следователно за n имаме три възможности: $n = pqr$, $n = p^3q$, $n = p^7$, където p, q, r са прости числа. В първия случай $n = pqr$. Тогава $3780 = (1+p)(1+q)(1+r)$. Ако допуснем, че трите прости делители са нечетни, ще получим, че 3780 се дели на 8, а това не е така. Следователно $p = 2$ и тогава $(1+q)(1+r) = 1260$, където $q < r$ са прости числа. Числото 1260 се разлага в произведение на две четни числа по следния начин $(2.3)(2.3.5.7)=(2.5)(2.3.3.7)=(2.7)(2.3.3.5)=(2.3.3)(2.5.7)=(2.3.5)(2.3.7)$. От петте възможности само при разлагането $(2.7)(2.3.3.5)$ и $(2.3.5)(2.3.7)$ получаваме за q и r прости числа, а именно $q = 13$, $r = 89$ и $q = 29$, $r = 41$ и в този случай задачата има две решения $n = 2.13.89 = 2314$ и $n = 2.29.41 = 2378$. Във втория случай ще имаме $n = p^3q$ и тогава

$$3780 = (1 + p + p^2 + p^3)(1 + q) = (1 + p)(1 + p^2)(1 + q).$$

Ако допуснем, че $q = 2$, то $(1 + p)(1 + p^2) = 1260 = 2.2.3.3.5.7$. Но $1 + p^2$ не се дели нито на 3, нито на 7, което означава, че $1+p > 1+p^2$.Тогава q е нечетно число. Ако допуснем, че p е нечетно, ще получим отново, че 3780 се дели на 8. Остава $p = 2$, откъдето $1 + q = 252$ или $q = 251$. Последното е просто и така получаваме още едно решение $n = 8.251 = 2008$. Накрая с непосрествена проверка се убеждаваме, че случаят $n = p^7$ не води до решения ($(3^8 - 1)/2 = 3280$, $(4^8 - 1)/3 > 3780$).

Задача 4. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$), в който $\sphericalangle ACB = 30°$. Точката M е симетричната на върха A относно правата BC. Точката N е симетричната на M относно върха C. Ако $P = AC \cap BN$ и $Q = AN \cap PM$, намерете отношението $AQ : QN$.

Решение. Тъй като BC е симетрала на AM, $\triangle AMC$ е равностранен. Следователно $AC = BC = CM = CN$. От равнобедрения триъгълник BNC получаваме, че $\sphericalangle CBN = \sphericalangle CNB = 15°$, а от равнобедрения триъгълник CAN следва, че $\sphericalangle ANC = 30°$. Следователно NB е ъглополовяща на $\sphericalangle ANC$. От свойството на ъглополовящата получаваме $CP : AP = CN : AN = 1 : \sqrt{3}$. За определяне на търсеното отношение използваме теоремата на Менелай за триъгълника CAN, пресечен с правата MPQ. Имаме

$$\frac{CP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QN} \cdot \frac{NM}{MC} = 1,$$

откъдето намираме търсеното отношение $AQ : QN = \sqrt{3} : 2$.

Задача 5. Да се реши уравнението

$$x^2 - 13[x] + 11 = 0.$$

където $[x]$ е най-голямото цяло число, което е по-малко или равно на x.

Решение. Очевидно $[x] > 0$ и тъй като $x \geq [x]$ и $-13[x] \geq -13x$ имаме

$$0 = x^2 - 13[x] + 11 \geq x^2 - 13x + 11,$$

откъдето $x \in [(13 - \sqrt{125})/2, (13 + \sqrt{125})/2]$, т.е. $[x] \in \{1, 2, \ldots, 12\}$.

Тъй като числото $x^2 + 11$ е цяло, което се дели на 13, имаме

$$x^2 + 11 \in \{13, 26, \ldots, 156\},$$

или

$$x \in \{\sqrt{2 + 13k} \mid k = 0, 1, \ldots, 11\}.$$

Тъй като $[x] = (x^2 + 11)/13$, то е изпълнено $[\sqrt{2 + 13k}] = k + 1$.С директна проверка се установява, че решения се получават за $k = 0, 9, 10, 11$, т.е. $x = \sqrt{2}, \sqrt{119}, \sqrt{132}, \sqrt{145}$.

Задача 6. Между някои от градовете в една държава са прекарани пътища. Два града са свързани с не повече от един път и от всеки град излизат поне три пътя. Известно е, че пътник, напуснал някой град трябва да мине през поне шест други града (без да повтаря пътища) преди да се върне там, откъдето е тръгнал. Да се докаже, че в държавата има поне 24 града.

Решение. Дефинираме граф с върхове градовете, в който два върха са свързани с ребро, ако между съответните им градове има път. Нека означим броя на върховете в графа с n. Да фиксираме произволен връх v в графа. Ако означим с $d(x, y)$ броя ребра в минимален път от x до y. Всички върхове u , за които $d(u, v) \leq 3$ са различни. Сега можем да считаме, че от всеки връх излизат точно три ребра, тъй като в противен случай

$$n \geq 1 + 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 29 > 24.$$

Повтаряйки това разсъждение получаваме, че $n \geq 22$.

Да допуснем, че $n = 22$ и да означим с $a_1, a_2, \ldots, f_1, f_2$ дванадесетте върха, намиращи се на разстояние 3 от фиксирания връх v. Тези върхове заедно с ребрата между тях образуват цикъл с дължина 12. Очевидно имаме

$$d(a_1, a_2) \geq 5, d(b_1, b_2) \geq 5, \ldots, d(f_1, f_2) \geq 5;$$

$$d(a_i, b_j) \geq 3, d(c_i, d_j) \geq 3, d(e_i, f_j) \geq 3, i, j \in \{1, 2\}.$$

Лесно се проверява, че в такъв случай имаме

$$d(a_1, a_2) = 6, d(b_1, b_2) = 6, \ldots, d(f_1, f_2) = 6;$$

$$d(a_i, b_j) = 3, d(c_i, d_j) = 3, d(e_i, f_j) = 3.$$

Но тогава в графа съществува цикъл с дължина 6, противоречие.

Случаят $n = 23$ е невъзможен, тъй като във всеки граф броят на върховете от нечетна степен е четен. Следователно $n \geq 24$.

Критерии за оценяване.

Задача 1.

Намиране на решението (0,0): 2 точки

Написване на квадратно уравнение за x: 1 точка

Намиране на корените на това уравнение: 2 точки

Отхвърляне на случаите $x_1 = x_2 = 1$ и $x_1 = x_2 = -1$: 2 точки

Задача 2.

Доказателство на факта $\triangle ADM \sim \triangle CND$: 2 точки

Доказателство на факта $\triangle ADM \cong \triangle CND$: 1 точка

Доказателство на факта, че точките B, M, N, P, Q лежат на една окръжност: 2 точки

Завършване на задачата: 2 точки

Задача 3.

Извод, че трябва да се разгледат трите случая $n = pqr$, $n = p^3q$, $n = p^7$: 1 точка

Решаване на случая $n = pqr$: 3 точки

Решаване на случая $n = p^3q$: 2 точки

Решаване на случая $n = p^7$: 1 точка

Задача 4.

Доказателство на факта, че $\triangle AMC$ е равностранен: 1 точка

Доказателство, че $\sphericalangle CBN = \sphericalangle CNB = 15^\circ$: 1 точка

Доказателство на факта, че NB е ъглополовяща на $\sphericalangle ANC$: 2 точки

Използване на теоремата на Менелай (или Чева) за завършване на задачата: 3 точки

Задача 5.

Отбелязване на факта $[x] > 0$: 1 точка

Намиране на ограничения за x: 2 точки

Намиране на възможните стойности на x: $x \in \{\sqrt{2 + 13k} \mid k = 0, 1, \ldots, 11\}$: 2 точки

Извършване на проверките и намиране на четирите корена: 2 точки

Задача 6.

Доказателство на факта $n \geq 22$: 2 точки

Отхвърляне на случая $n = 22$: 4 точки

Отхвърляне на случая $n = 23$: 1 точка

Задачите са предложени от Иван Тонов (Задача 1, 3 и 4) и Иван Ланджев (Задачи 2, 5 и 6).

Телефон за връзка: 979-28-92.