РЕШЕНИЯ

ТЕМА ЗА 7 КЛАС

Задача 1. Дадено е уравнението

$$2(x-a)(x+a)=\frac{5}{4}(x-a)^2+0,75(x+a)^2,$$

в което a е параметър.

а) Да се реши уравнението при $a=502$.

б) Да се намерят всички стойности на параметъра a, за които числото 2008 е решение на уравнението.

Решение: Умножаваме двете страни на даденото уравнение по 4 и последователно преобразуваме:

$$8\left(x^2-a^2\right)=5\left(x^2-2ax+a^2\right)+3\left(x^2+2ax+a^2\right)\Leftrightarrow 4ax=16a^2\Leftrightarrow ax=4a^2.$$

а) При $a=502$ получаваме уравнението:

$$502x=4\cdot 502^2\Leftrightarrow x=\frac{4\cdot 502^2}{502}=4\cdot 502=2008.$$

б) При $a=0$ всяко число е решение на уравнението, следователно и 2008 ще бъде негово решение. При $a\neq 0$ уравнението има единствено решение $x=4a$. Оттук $4a=2008\Leftrightarrow a=502$.

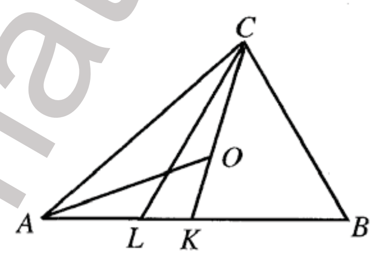
Задача 2. Даден е триъгълникът ABC, в който $\angle ACB=2\angle BAC$ и ъглополовящите на $\angle BAC$ и $\angle ACB$ се пресичат в точката O.

а) Да се докаже, че $AO>\frac{1}{2}AC$.

б) Да се намерят ъглите на триъгълника ABC, ако $AO=BC$.

Решение: а) В триъгълника AOC имаме, че $\angle ACO=2\angle CAO$, което означава, че $\angle ACO>\angle CAO\Rightarrow AO>CO$. Съгласно неравенството на триъгълника, приложено за ΔAOC, имаме $AO+CO>AC$. Но тъй като $AO>CO$, то:

$$2AO>AO+CO>AC\Rightarrow AO>\frac{1}{2}AC.$$



б) Нека CK $(K\in AB)$ и CL $(L\in AB)$ са ъглополовящите съответно на $\angle ACB$ и $\angle ACK$ (вж. чертежа). От равенството $\angle ACB=2\angle BAC$ следва, че ΔACK е равнобедрен с бедра $AK=CK$. Но тогава отсечките AO и CL са равни като ъглополовящи към бедрата на равнобедрен триъгълник. Оттук следва, че триъгълникът BLC е равнобедрен с бедра $CB=CL$. Ако означим $\angle BAC=\alpha$, то $\angle ACK=\alpha$ и тогава $\angle BLC=\frac{3\alpha}{2}$ като външен за ΔACL. Освен това $\angle ABC=180^\circ-3\alpha$ от ΔABC. Следователно $\frac{3\alpha}{2}=180^\circ-3\alpha\Rightarrow\alpha=40^\circ$, което означава, че:

$$\angle BAC=40^\circ,\angle ACB=80^\circ,\angle ABC=60^\circ.$$

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа $n > 1$, за които съществува естествено число, завършващо на 2008, което е точна n – та степен на естествено число.

Решение: Числото $n = 2$ не е решение, защото няма точен квадрат, завършващ с цифрата 8. Нека $n \geq 4$. Всяко число от вида $\overline{x2008}$, където x е произволно естествено число, може да се запише във вида $10^4 x + 2008$. Да предположим, че съществува естествено число y, за което $10^4 x + 2008 = y^n$. Ясно е, че y е четно и тогава y^n ще се дели на 16, защото $n \geq 4$. Но числото $10^4 x + 2008$ не се дели на 16, защото 10^4 се дели на 16, а 2008 – не. Следователно равенството $10^4 x + 2008 = y^n$ не е възможно.

Нека сега $n = 3$. Като използваме, че $2008 = 2 \cdot 10^3 + 2^3$, ще допълним 2008 до точен куб. За целта да разгледаме числото $\left(10^3 + 2\right)^3$, като го запишем във вида:

$$\left(10^3 + 2\right)^3 = 10^9 + 3 \cdot 2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 2^2 \cdot 10^3 + 2^3 = 10^9 + 6 \cdot 10^6 + 12 \cdot 10^3 + 2^3 =$$

$$= 10^9 + 6 \cdot 10^6 + 10 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 2^3 = 10^4 \left(10^5 + 6 \cdot 10^2 + 1\right) + 2008.$$

Последното равенство показва, че числото $\left(10^3 + 2\right)^3$ завършва на 2008. Ето защо $n = 3$ е единственото решение на задачата. Може да се докаже, че всички естествени числа z, за които z^3 завършва на 2008, са от вида $z = 2500k + 1002$, където $k \in \mathbb{N}$.

<u>*Критерии за оценяване:*</u>

Задача 1. Общо 7 т., от които: 4 т. за получаване на уравнението във вида $ax = 4a^2$ (по 1 т. за вярно разкриване на всяка двойка скоби + 1 т. за останалите тъждествени преобразувания); 1 т. за намиране на отговора $x = 2008$ в а) и по 1 т. за намиране на всеки от двата отговора в б).

Задача 2. Общо 7 т., от които: 3 т. за а) и 4 т. за б). В а) 1 т. за обосновка на неравенството $AO > CO$, 1 т. за използване на неравенството $AO + CO > AC$ и 1 т. за довършване на решението. В б) 1 т. за построяване на CL, 1 т. за обосновка на равенството $AO = CL$, 1 т. за изразяване на двата равни ъгъла в ΔBCL и 1 т. за намиране на ъглите на ΔABC.

Задача 3. Общо 7 т., от които: 1 т. за случая $n = 2$, 2 т. за случая $n \geq 4$ и 4 т. за случая $n = 3$, като от тези 4 т., 1 т. да се дава за хипотезата, че $n = 3$ е решение, а останалите 3 т. за нейното доказване.

Забележка. Посочените критерии са примерни и съответстват на предложените от Националната комисия решения. При наличие на алтернативни решения всяка Областна комисия изготвя свои критерии за оценяването им, като се съобразява с предложените.