РЕШЕНИЯ

ТЕМА ЗА 5 КЛАС

Задача 1. С използване само на цифрите 3 и 5 (всяка поне по веднъж) трябва да се запише число, което се дели на 3 и на 5. Намерете:

а) най-малкото такова число;

б) най-голямото единадесетцифрено такова число.

Обосновете решението!

Решение: а) Цифрата на единиците на търсеното число трябва да е 5, за да се дели числото на 5. Търсеното число не може да е двуцифрено, защото 35 не се дели на 3. Щом в записа на числото има една петица, то трябва да има най-малко още две петици, за да се дели числото на 3. Така стигаме най-малко до четирицифрено число, записано с една тройка и три петици. Най-малкото от четирицифрените числа с това свойство е 3 555.

б) Както беше отбелязано в а), цифрата на единиците на търсеното число е 5. Сега цифрата на десетиците трябва да е 3, за да има цифра 3 и числото да е възможно най-голямо. Освен това броят на петиците в търсеното число трябва да е кратен на 3. Следователно в най-голямото единадесет цифрено число с исканото свойство петиците са точно девет. За тройките остава да са две и търсеното число е $55\ 555\ 555\ 335$.

Задача 2. Представете числото $\dfrac{77}{65}$ като сбор на две правилни несъкратими обикновени дроби, чийто знаменатели са по-малки от 65.

Решение: Разлагането на знаменателя на произведение от прости множители е $65 = 5.13$. Търсим естествени числа x и y, за които $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{13}=\dfrac{77}{65}$, т.е. $13x+5y=77$.

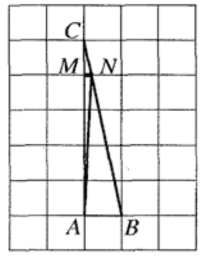
Тъй като $\dfrac{x}{5}$ трябва да е правилна дроб, то $x<5$. При $x=1$, $x=2$ и $x=3$ получаваме съответно $5y=64$, $5y=51$ и $5y=38$, нито едно от които няма решение в множеството на естествените числа. При $x=4$ получаваме $5y=25$, откъдето $y=5$. Следователно:

$$\frac{4}{5}+\frac{5}{13}=\frac{77}{65}.$$

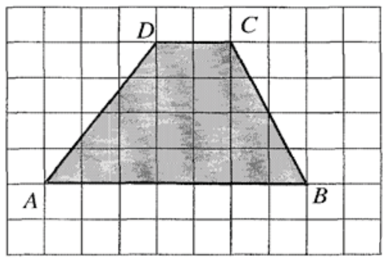
Намереното представяне не е единствено. Например $\dfrac{3}{10}+\dfrac{23}{26}=\dfrac{77}{65}$, $\dfrac{7}{15}+\dfrac{28}{39}=\dfrac{77}{65}$ и $\dfrac{11}{20}+\dfrac{33}{52}=\dfrac{77}{65}$.

Задача 3. Не е разрешено използването на разграфена линийка! Тогава:

а) намерете дължината на отсечката MN, ако дължината на отсечката AB е 1 см;

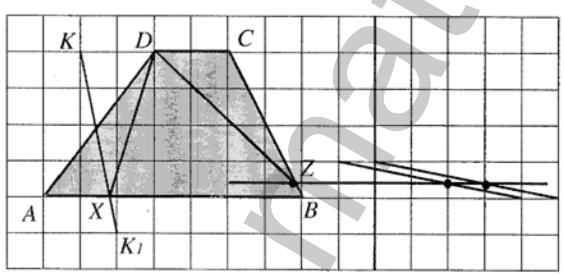


б) разделете трапеца $ABCD$ на две фигури с общ връх D – триъгълник и четириъгълник, едната от които е с четири пъти по-голямо лице от другата. (Обосновете различните начини за такова разделяне!)



Решение: а) $S_{ABC} = \dfrac{1.5}{2} = \dfrac{5}{2}$ кв. см, $S_{ABN} = \dfrac{1.4}{2} = 2$ кв. см и $S_{ANC} = \dfrac{5.MN}{2}$ кв. см. Оттук $\dfrac{1.5}{2} - \dfrac{1.4}{2} = \dfrac{5.MN}{2}$ и $5.MN = 1$. Следователно $MN = \dfrac{1}{5}$ см.

б) Лицето на трапеца е $S_{ABCD} = \dfrac{7+2}{2} \cdot 4 = 18$ кв. см. Най-напред да потърсим точка X от страната AB така, че $S_{AXD} = \dfrac{1}{5} S_{ABCD} = \dfrac{18}{5}$ кв. см. Височината към страната AX в ΔAXD е 4 см и от условието $\dfrac{18}{5} = \dfrac{AX.4}{2}$ получаваме $AX = 1\dfrac{4}{5}$ см. Остава в квадратната мрежа да намерим отсечка с дължина $\dfrac{4}{5}$ см, използвайки резултата от а). По-нататък да потърсим точка Y отново от AB, но така, че $S_{AYD} = \dfrac{4}{5} S_{ABCD} = \dfrac{72}{5}$ кв. см. От условието $\dfrac{AY.4}{2} = \dfrac{78}{5}$ получаваме $AY = \dfrac{36}{5} = 7\dfrac{1}{5}$ см. Последното е невъзможно, защото $AB = 7$ см. Следователно точката Y не съществува. Сега да потърсим точка Z от страната BC на трапеца така, че $S_{DCZ} = \dfrac{1}{5} S_{ABCD} = \dfrac{18}{5}$ кв. см.



Означаваме с z см разстоянието от Z до правата DC. От условието $\dfrac{18}{5} = \dfrac{2z}{2}$ получаваме $z = 3\dfrac{3}{5}$ см. Тъй като $3\dfrac{3}{5} < 4$, точката Z съществува и остава да я построим. За целта прекарваме права, успоредна на DC и на разстояние $3\dfrac{3}{5}$ см от нея (вж. чертежа). Тази права пресича BC в Z. Най-накрая, ако точката T е от страната BC така, че $S_{DCT} = \dfrac{4}{5} S_{ABCD} = \dfrac{72}{5}$ кв. см и t см е разстоянието от T до правата DC, то от условието $\dfrac{2.t}{2} = \dfrac{72}{5}$ намираме $t = \dfrac{72}{5} = 14\dfrac{2}{5}$ см. Понеже $14\dfrac{2}{5} > 4$, точката T не съществува.

Критерии за оценяване:

Задача 1. Общо 7 т., от които: 3 т. за а) и 4 т. за б). В а) 1 т. за определяне цифрата на единиците, 1 т. за съобразяване, че числото е четирицифрено и 1 т. за посочване на самото число. В б) 2 т. за установяване, че числото завършва на 35, 1 т. за съобразяване, че петиците са девет и 1 т. за посочване на самото число.

Задача 2. Общо 7 т., от които: 1 т. за разлагането $65 = 5.13$, 1 т. за съставяне на модела $\frac{x}{5}+\frac{y}{13}=\frac{77}{65}$, 1 т. за опростяване на модела до $13x+5y=77$, общо 3 т. за изчерпване на случаите и 1 т. за посочване на окончателния отговор $\frac{4}{5}+\frac{5}{13}=\frac{77}{65}$. Ако е намерено друго представяне, оценяването следва изложеното.

Задача 3. Общо 7 т., от които: 2 т. за а) и 5 т. за б). В а) 1 т. за намиране на S_{ABC} и S_{ABN} + 1 т. за намиране на S_{ANC} и MN. В б) 1 т. за намиране на AX, 1 т. за отхвърляне на AY, 1 т. за намиране на z, 1 т. за отхвърляне на t и 1 т. за построение без разграфена линийка.

Забележка. Посочените критерии са примерни и съответстват на предложените от Националната комисия решения. При наличие на алтернативни решения всяка Областна комисия изготвя свои критерии за оценяването им, като се съобразява с предложените.