57. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 19–20 април 2008 г.

Условия и решения на задачите за 12. клас

Задача 12.1. В триъгълна пирамида $ABCD$ околните ръбове DB и DC са равни и $\angle DAB = \angle DAC$. Да се намери обемът на пирамидата, ако $AB = 15, BC = 14, CA = 13$ и $DA = 18$.

Решение. Нека H е ортогоналната проекция на D върху равнината (ABC). Тъй като $\angle DAB = \angle DAC$, то H лежи върху ъглополовящата на $\angle BAC$ (докажете!). От друга страна, от $DB = DC$ следва, че $BH = CH$, т.е. H лежи върху симетралата на отсечката BC. Тъй като $BA \neq AC$, то ъглополовящата на $\angle BAC$ и симетралата на BC се пресичат върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност (докажете!). Следователно H лежи върху тази окръжност. Нека $L = AH \cap BC$. Тогава $\triangle ABL \sim \triangle AHC$ и значи $AH = \frac{AB.AC}{AL}$. От формулата за ъглополовящата намираме $AL = \frac{3}{2}\sqrt{65}$, т.е. $AH = 2\sqrt{65}$. Следователно $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 8$. От Хероновата формула изчисляваме, че $S_{ABC} = 84$ и получаваме, че обемът на пирамидата е 224.

Оценяване. 3 т. за доказателство, че H лежи върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност, 3 т. за намиране на DH и 1 т. за намиране на обема.

Задача 12.2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които графиките на функциите $f(x) = x^2 + a$ и $g(x) = x^3$ имат точно една обща допирателна.

Решение. Понеже $f'(x) = 2x$ и $g'(x) = 3x^2$, то права t, която се допира до графиките на f и g съответно в точки $(x_1, x_1^2 + a)$ и (x_2, x_2^3) има уравнение $y = x_1^2 + a + 2x_1(x - x_1) = x_2^3 + 3x_2^2(x - x_2)$. Оттук $2x_1 = 3x_2^2$ и $x_1^2 - a = 2x_2^3$. Тогава $a = h(x_2) = \frac{9}{4}x_2^4 - 2x_2^3$. Правата t съществува и е единствена, когато уравнението $h(x) = a$ има точно един реален корен. Понеже $h'(x) = 3x^2(3x - 2)$, то функцията h строго намалява в интервала $(-\infty, 2/3]$ и строго расте в интервала $[2/3, +\infty)$. Тъй като $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$, следва, че уравнението $h(x) = a$ има точно един реален корен само при $a = h(2/3) = -4/27$ (при $a > -4/27$ то има два реални корена, а при $a < -4/27$ няма реален корен).

Оценяване. 2 т. за двете уравнения на t, 1 т. за равенството $a = h(x_2)$, 2 т. за намиране на интервалите на монотонност на h и 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Съществува ли естествено число n, за което числото

$\left(\frac{2008}{n}\right)^3 + \frac{2008}{n}$ е квадрат на рационално число?

Решение. Не съществува. Нека $\left(\frac{2008}{n}\right)^3 + \frac{2008}{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, $(a, b) = 1$. Полагаме $d = (2008, n)$ и $2008 = pd$, $n = qd$, където $(p, q) = 1$. Тогава $(*)$ $b^2(p^3 + pq^2) = a^2q^3$. Тъй като $(a, b) = 1$ и $(p^3 + pq^2, q^3) = 1$, следва, че $b^2 = q^3$ и $p^3 + pq^2 = a^2$. Оттук $b = b_1^3$, $q = b_1^2$ и $p(p^2 + b_1^4) = a^2$. Сега от $(p, p^2 + b_1^4) = (p, b_1^4) = 1$ (тъй като $(p, q) = 1$) заключаваме, че $p = x^2$ и $p^2 + b_1^4 = y^2$. Оттук $x^4 + b_1^4 = y^2$ и, както е добре известно, следва, че $x = 0$ или $b_1 = 0$, което е противоречие. Противоречието следва и от факта, че $p = x^2$ е делител на $2008 = 2^3.251$. Оттук $x = 1$ или $x = 2$ и стигаме до $1 + b_1^4 = y^2$ или $16 + b_1^4 = y^2$, откъдето лесно получаваме, че $b_1 = 0$.

Забележка. Задачата е частен случай на добре известния факт, че $(0, 0)$ е единствената рационална точка върху елиптичната крива $y^2 = x^3 + x$.

Оценяване. 2 т. за свеждане до $(*)$, 3 т. за свеждане до $x^4 + b_1^2 = y^2$ и 2 т. за получаване на противоречие.

Задача 12.4. Да се намерят всички естествени числа a такива, че $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+a}]$ за произволно естествено число n ($[x]$ означава цялата част на числото x).

Решение. При $n = 3$ имаме, че $[\sqrt{12+a}] = [2+\sqrt{3}] = 3$ и следователно $a < 4$. Сега ще покажем, че числата $a = 1, 2, 3$ изпълняват условието. С последователно повдигане на квадрат лесно следва, че

$$(*)\ \sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+3}$$

за всяко $n \in \mathbb{N}$. Да предположим, че $\sqrt{4n+1} < m \leq \sqrt{4n+3}$ за някои $m, n \in \mathbb{N}$. Тогава $m^2 = 4n+2$ или $m^2 = 4n+3$, което е невъзможно, защото m^2 дава остатък 0 или 1 при деление на 4. Следователно $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+a}]$ при $a = 1, 2, 3$.

Оценяване. 1 т. за това, че $a < 4$, 3 т. за доказателство на неравенството $(*)$ и 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.5. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните BC, CA и AB съответно в точки A_1, B_1 и C_1. Известно е, че правата A_1B_1 разполовява отсечката CC_1. Да се намерят ъглите на триъгълника, ако техните синуси образуват аритметична прогресия.

Решение. Ще използваме стандартните означения за елементите на

$\triangle ABC$. Правата A_1B_1 разполовява отсечката CC_1 точно когато

$$S_{A_1B_1C} = S_{A_1B_1C_1} \Leftrightarrow A_1C.B_1C\sin\gamma = A_1C_1.B_1C_1\sin(90^\circ - \gamma/2) \Leftrightarrow$$

$$(p-c)^2\sin\frac{\gamma}{2} = 2(p-b)\sin\frac{\beta}{2}(p-a)\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \cot^2\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 2\cot\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \cos^2\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \Leftrightarrow 2\cos\gamma = \sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$(*)\ 2\cos\gamma = \cos\beta + \cos\alpha.$$

В частност, $\alpha \le \gamma \le \beta$ или $\alpha \ge \gamma \ge \beta$. Тогава от условието следва, че $2\sin\gamma = \sin\beta + \sin\alpha$. Повдигаме това равенство и $(*)$ на квадрат и ги събираме. От тъждеството $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ получаваме, че $1 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$. Оттук лесно следва, че $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

Оценяване. 5 т. за получаване на равенството $(*)$, от които 2 т. за $\cos^2\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, и 3 т. за довършване на решението.

Коментар. Ако предположим, че $\alpha \le \gamma \le \beta$ или $\alpha \ge \gamma \ge \beta$, то $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\gamma$, т.е. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, откъдето $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}$. Оттук и равенството $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ (вж. решението) получаваме, че $\cot^2\frac{\gamma}{2} = 3$. Тогава лесно следва, че $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

Такъв подход (без доказателство, че $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\gamma$) да се оценява с 5 т.

Задача 12.6. Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такава, че $f(x+y^2) \ge (y+1)f(x)$ за проиволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Понеже $f(x) \ge 0.f(x-1) = 0$, то

$$f(x+y^2) \ge (y+1)f(x) \ge f(x), \quad y \ge 0$$

и значи f е растяща функция. Нека $a_0 = b_0 = 0$, $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$ и $b_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. Тъй като $f(x+y^2) - f(x) \ge yf(x)$, то

$$f(x+a_{k+1}) - f(x+a_k) \ge \frac{f(x+a_k)}{k+1} \ge \frac{f(x)}{k+1}.$$

Като съберем почленно тези неравенства за $k = 0, 1, \dots n-1$, получаваме, че $f(x+a_n) - f(x) \ge b_n f(x)$. Както е добре известно, $a_n < 2$ за всяко n, докато $b_n \to \infty$ (докажете!). Тогава $f(x+2) \geq (1+b_n)f(x)$ и граничен преход показва, че $f(x) \leq 0$. От друга страна, $f(x) \geq 0$ и следователно $f(x) = 0$ за всяко x. Тази функция очевидно изпълнява даденото условие.

Оценяване. 1 т. за $f \geq 0$, 1 т. за монотонността на f, 2 т. за неравенството $f(x+a_n) \geq (1+b_n)f(x)$ и 3 т. за довършване на решението.

Коментар. След установяване на неотрицателността и монотонността на f неположителността на f може да се докаже и така. Имаме, че $\frac{f(x+y^2)-f(x)}{y^2} \geq \frac{f(x)}{y}$, $y \neq 0$. Понеже f е монотонна функция, известно е, че тя има производна за почти всички x; в частност, за всяко x от някакво неограничено отгоре множество A. За $x \in A$ при $y \to 0+$ следва, че $f(x) \leq 0$. Остава да съобразим, че за всяко $x \in \mathbb{R}$ съществува $y > 0$ така, че $x + y^2 \in A$ и тогава $0 \geq f(x+y^2) \geq (y+1)f(x) \geq f(x)$.

Второ решение. Както по-горе виждаме, че $f(x) \geq 0$. За $x > 0$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$ имаме, че

$$f\left(x\left(2-\frac{k}{n}\right)\right) \geq \left(1+\sqrt{\frac{x}{n}}\right) f\left(x\left(2-\frac{k+1}{n}\right)\right).$$

Умножаваме почленно тези неравенства и получаваме, че

$$(*)\ f(2x) \geq \left(1+\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^n f(x).$$

Понеже $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \to e^t$, то $\left(1+\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^n \to +\infty$ при $x > 0$. Следователно $f(x) \leq 0$ при $x > 0$. За произволно x избираме $y > 0$ така, че $x + y^2 > 0$ и от изходното неравенство заключаваме, че $f(x) \leq 0$. Оттук $f(x) = 0$ за всяко x.

Оценяване. 1 т. за $f \geq 0$, 2 т. за $(*)$ и 4 т. за довършване на решението.

Коментар. Второто решение позволява да намерим всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такава, че $f(x+y) \geq (y+1)f(x)$ за проиволни $x, y \in \mathbb{R}$. Наистина, както по-горе, получаваме, че $f \geq 0$, $f(x) \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n f(0)$ и $f(0) \geq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n f(x)$. Понеже $\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n \to e^{\pm x}$, следва, че $f(x) = f(0)e^x$. Обратно, за всяко $c \geq 0$ фунцията $f(x) = ce^x$ изпълнява даденото условие, понеже $e^y \geq 1 + y$ (докажете!).

Автори на задачите: Олег Мушкаров - 12.1, 12.3, 12.4, Николай Николов - 12.2, 12.5, 12.6.

Брошурата е подготвена от Николай Николов.