Министерство на образованието и науката

57. Национална олимпиада по математика, Областен кръг

Тема за 11. клас
Първи ден, 19 април, 2008 г.

Задача 1. Дадена е аритметична прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, за която е изпълнено $a_1.a_2 < 0$ и

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) = -\frac{3}{8}.$$

Да се намери най-малкото естествено число $n > 2$, за което $\frac{a_n}{a_2}$ е точен квадрат на естествено число.

Решение. Ако d е разликата на прогресията, като използваме равенствата $a_1 = a_2 - d$ и $a_3 = a_2 + d$, получаваме, че равенството от условието е еквивалентно на

$$3a_2.\frac{3a_2^2 - d^2}{a_2(a_2^2 - d^2)} = -\frac{3}{8},$$

откъдето $25a_2^2 = 9d^2$. Ако $d = -\frac{5}{3}a_2$, то $a_1 = \frac{8}{3}a_2$ и тогава $a_1a_2 = \frac{8}{3}a_2^2 > 0$. Следователно $d = \frac{5}{3}a_2$ и тогава $a_1 = -\frac{2}{3}a_2$. Директна проверка показва, че $\frac{a_{11}}{a_2} = 16$ и при $n < 11$ частното $\frac{a_n}{a_2}$ не е квадрат на естествено число. Следователно търсеното число е $n = 11$.

Критерии за оценяване:

За получаване на $25a_2^2 = 9d^2$ или аналогична връзка – 4 точки;

За отхвърляне на случая $d = -\frac{5}{3}a_2$ – 1 точка;

За получаване на $n = 11$ – 2 точки.

Задача 2. Във вътрешността на равностранен триъгълник ABC е избрана точка O. Симетричните точки на точка O спрямо страните BC, CA и AB са означени съответно с A_1, B_1 и C_1. Да се докаже, че правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.

Решение. Ще покажем, че $A = \frac{\sin \sphericalangle CAA_1}{\sin \sphericalangle BAA_1}\frac{\sin \sphericalangle ABB_1}{\sin \sphericalangle CBB_1}\frac{\sin \sphericalangle BCC_1}{\sin \sphericalangle ACC_1} = 1$ и твърдението ще следва от синусовия вариант на теоремата на Чева. От синусовата теорема за $\triangle AA_1C$ и $\triangle AA_1B$ получаваме равенствата $\sin \sphericalangle CAA_1 = \frac{CA_1 \sin(60^\circ + \gamma_2)}{AA_1}$ и $\sin \sphericalangle BAA_1 = \frac{BA_1 \sin(60^\circ + \beta_1)}{AA_1}$. Оттук получаваме

$$\frac{\sin \sphericalangle CAA_1}{\sin \sphericalangle BAA_1} = \frac{CA_1}{BA_1}\frac{\sin(60^\circ + \gamma_2)}{\sin(60^\circ + \beta_1)} = \frac{OC}{OB}\frac{\sin(60^\circ + \gamma_2)}{\sin(60^\circ + \beta_1)}.$$

След аналогични пресмятания за $\dfrac{\sin \sphericalangle ABB_1}{\sin \sphericalangle CBB_1}$ и $\dfrac{\sin \sphericalangle BCC_1}{\sin \sphericalangle ACC_1}$, получаваме

$$A = \frac{OC}{OB}\frac{OA}{OC}\frac{OB}{OC}\frac{\sin(60^\circ+\gamma_2)\sin(60^\circ+\alpha_2)\sin(60^\circ+\beta_2)}{\sin(60^\circ+\gamma_1)\sin(60^\circ+\alpha_1)\sin(60^\circ+\beta_1)} = 1,$$

поради $60^\circ + \gamma_1 + 60^\circ + \gamma_2 = 180^\circ$ и аналогичните равенства за останалите ъгли.

Критерии за оценяване:

За правилно изразяване на $\dfrac{\sin \sphericalangle CAA_1}{\sin \sphericalangle BAA_1}$ или аналогичните отношения – 3 точки;

За деклариране, че ще се използва синусовият вариант на теоремата на Чева – 1 точка;

За правилно получаване на израза A – 1 точка;

За използване на $60^\circ + \gamma_1 + 60^\circ + \gamma_2 = 180^\circ$ и довършване на решението – 2 точки.

Задача 3. Нека a и b са естествени числа. Да се докаже, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, зададена с равенствата $a_1 = a$ и $a_{n+1} = \varphi(a_n + b)$ $n \geq 1$ е ограничена.

(За едно естествено число k с $\varphi(k)$ означаваме броят на естествените числа, които са по-малки от k и са взаимнопрости с k.)

Решение. Да разгледаме числата $N!+2, N!+3, \ldots, N!+N$, където N е естествено число, за което $N! > a$ и $N > 2b+1$. Понеже $\varphi(a_n + b) \leq a_n + b - 1$, то всеки член на редицата е най-много с $b-1$ по-голям от предния. Следователно или редицата е ограничена, или съществува k за което $a_k < N! + 2$ и a_{k+1} е някое от избраните числа. Тогава $a_{k+1}+b$ отново е измежду тези числа и следователно има прост делител $p \leq N$. Но ако простото число p дели t, то $\varphi(t) \leq t.\dfrac{p-1}{p}$, откъдето получаваме

$$a_{k+2} = \varphi(a_{k+1} + b) \leq (N! + N)\tfrac{N-1}{N} < N! + 2,$$

като последното неравенство е еквивалентно на $N! > N(N-3)$, което е очевидно.

Получихме, че $a_{k+2} < N! + 2$, т.е. редицата е ограничена.

Критерии за оценяване:

За посочване на горна граница за редицата – 1 точка;

За вярна формула за $\varphi(n)$ – 1 точка;

За неравенства от рода на $\varphi(t) \leq t.\dfrac{p-1}{p}$ – 1 точка;

За останалата част от решението – 4 точки.

Втори ден, 20 април, 2008 г.

Задача 4. В окръжност с радиус $R = 65$ е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB = 50$, $BC = 104$ и $CD = 120$. Да се намери страната AD.

Решение. Ако O е центърът на окръжността, а M и N са среди съответно на страните AB и CD, то $OM = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$ и $ON = \sqrt{65^2 - 60^2} = 25$. Следователно $\triangle AMO \cong \triangle OND$, откъдето получаваме

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 2(\sphericalangle AOM + \sphericalangle DON) = 180^\circ.$$

Тогава диагоналите на четириъгълника са перпендикулярни, откъдето

$$AD = \sqrt{AB^2 + CD^2 - BC^2} = \sqrt{6084} = 78.$$

Критерии за оценяване:

1. За представеното решение.

За доказване на $\triangle AMO \cong \triangle OND$ – 2 точки;

За доказване на $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 2(\sphericalangle AOM + \sphericalangle DON) = 180^\circ$ – 1 точка;

За извода, че диагоналите са перпендикулярни – 1 точка;

За използване на $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ и намиране на AD – 3 точки.

2. За решение с намиране на синусите и косинусите на $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle COD$ и след това пресмятане на $\sphericalangle COD$.

За определяне на всеки от синусите и косинусите на $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle COD$ – по 1 точка на ъгъл;

За пресмятане на синус или косинус на $\sphericalangle COD$ – 3 точки;

За определяне на AD – 1 точка.

Задача 5. а) Дадена е редицата $a_n = \sqrt[n]{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

б) Нека $f(x)$ е полином, коефициентите на който са положителни реални числа. Да се докаже, че редицата $b_n = \sqrt[n]{f(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ е сходяща и да се намери нейната граница.

Решение. а) Първо ще покажем, че $n < \left(1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)^n$. Наистина при $n = 1$ неравенството е очевидно, а при $n \geq 2$ имаме

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n = 1 + n\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{2}{n} + \cdots > 1 + n\sqrt{\frac{2}{n}} + n - 1 > n.$$

Тогава за всяко n имаме $1 \leq a_n < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ и твърдението следва от $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}\right) = 1$.

б) Нека $\deg f(x) = k$. Ясно е че съществува N, такова че при $n > N$ имаме $1 < f(n) < n^{k+1}$. Следователно $1 < b_n < (\sqrt[n]{n})^{k+1}$. Тъй като от а) имаме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{k+1} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Критерии за оценяване:

За а) – 3 точки

За б): За определяне на $1 < f(n) < n^{k+1}$ за $n > N$ – 3 точки;

За прилагане на а) и довършване на решението – 1 точка.

Задача 6. Нека k е естествено число. Означаваме с $f(k)$ най-голямото естествено число, за което съществува множество M от естествени числа с $f(k)$ елемента, такова че:

1. Всеки елемент на M е делител на k.
2. Никой елемент на M не дели друг негов елемент.

Да се докаже, че ако m и n са взаимнопрости естествени числа, то

$$f(n.2^n)f(m.2^m) = f(mn2^{m+n}).$$

Решение. Ще докажем, че ако $k = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}$ и $\alpha_1 \geq \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_t$, то $f(k) = (\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\dots(\alpha_t+1)$, т.е. $f(k)$ е точно броят на делителите на числото $p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}$. Да означим $A = (\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\dots(\alpha_t+1)$. Ако $|M| > A$, то ще съществуват два елемента от M от вида $p_1^{s_1}d$ и $p_1^{s_2}d$, като е ясно, че единия дели другия, откъдето намираме, че $f(k) \leq A$. Да забележим, че множеството

$$M = \{p_1^{\alpha_1-(\beta_2+\dots+\beta_t)}d \mid d = p_2^{\beta_2}\dots p_t^{\beta_t} \text{ е делител на } p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}\}$$

има исканите свойства. Следователно $f(k) \geq A$, т.е. $f(k) = A$.

Поне едното число от m и n е нечетно. Без ограничение приемаме, че n е нечетно и $m = 2^t.m_1$ за $t \geq 0$, като $(m_1, n) = 1$. Понеже n е по-голямо от сбора на степените на простите си делители, то в каноничното разлагане на $n.2^n$ и $m.2^m$ простият делител 2 притежава необходимото свойство.

Тогава $f(n2^n)$ е броят на делителите на n, $f(m2^m)$ е броят на делителите на m_1, а $f(mn2^{m+n})$ е броят на делителите на nm_1. Следователно $f(n.2^n)f(m.2^m) = f(mn2^{m+n})$.

Критерии за оценяване:

За определяне на точната стойност на $f(k)$ когато $\alpha_1 \geq \alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_t$ – 5 точки;

За прилагане на това свойство в задачата – 2 точки.