57. Републиканска олимпиада по математика
Областен кръг, 19-20.04.2008 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване на задачите за 10. клас

Задача 1. Да се намерят всички реални стойности на x, за които са изпълнени неравенствата

$$1 \leq \sqrt{x+2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq 4.$$

Решение. Задачата има смисъл при $x > -2$. Полагаме $\sqrt{x+2} = u > 0$ и получаваме неравенствата $u^2 - u - 1 \geq 0$ и $u^2 - 4u - 1 \leq 0$. Решенията им (с отчитане на $u > 0$) са съответно $u \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $0 < u \leq 2+\sqrt{5}$. Следователно търсените стойности на x са точно тези, за които $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \sqrt{x+2} \leq 2+\sqrt{5}$. Оттук лесно получаваме $x \in \left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, 7+4\sqrt{5}\right]$.

Инструкции за оценяване: 1 т. за полагането; по 2 т. за решаване на всяко от двете получени неравенства с отчитане на $u > 0$; по 1 т. за решаване на всяко от последните две неравенства.

Задача 2. Точките A, B и C са разположени върху окръжност k така, че допирателните към k в точките A и B се пресичат в точка P, а C лежи на голямата дъга $\overset{\frown}{AB}$. Нека правата през C, която е перпендикулярна на PC, пресича правата AB в точка Q. Да се докаже, че:

а) ако правите PC и QC пресичат k за втори път съответно в точките M и N, то $\measuredangle CQP = \measuredangle CMN$;

б) ако S е средата на PQ, то SC е допирателна към k.

Решение. а) Нека O е центъра на окръжността и PO пресича AB в точка K (Фиг. 1). По условие $\measuredangle PCQ = 90^\circ$ и следователно MN е диаметър в k.

От една страна, четириъгълникът $QCKP$ е вписан в окръжност с диаметър PQ и $\measuredangle CQP = \measuredangle CKO$, а от друга $PM.PC = PA^2 = PK.PO$, т.е. четириъгълникът $MCOK$ е вписан в окръжност и $\measuredangle CKO = \measuredangle CMO$. Следователно $\measuredangle CQP = \measuredangle CMN$.

Фигура 1

б) От а) имаме $\measuredangle CQP = \measuredangle CMN$ и освен това $\measuredangle QCP = \measuredangle MCN = 90^\circ$, т.е. $\triangle CQP \sim \triangle CMN$, откъдето стигаме до заключението, че

$$\measuredangle SCP = \measuredangle OCN = \measuredangle ONC = \frac{1}{2}\widehat{MC},$$

т.е. SC е допирателна към k.

Инструкции за оценяване: 1 т. за допълнителното построяване на точка K; 1 т. за $QCKP$ - вписан; 2 т. за $MCOK$ - вписан; 1 т. за извода, че $\measuredangle CQP = \measuredangle CMN$; 2 т. за извода, че SC е допирателна към k.

Задача 3. Да се докаже, че съществува функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяваща равенството $f(f(n)) = 3n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Всяко естествено число n еднозначно се представя във вида $n = 3^k t$, където k е цяло неотрицателно число и t е естествено число, за което $(t, 3) = 1$. Да разгледаме функцията

$$f(n) = \begin{cases} 3^{k+1}(t+1), & \text{ако } t \equiv 1 \pmod 3 \\ 3^k(t-1), & \text{ако } t \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}.$$

Ако $n = 3^k t$, където $t \equiv 1 \pmod 3$, то

$$f(f(n)) = f(3^{k+1}(t+1)) = 3^{k+1}(t+1-1) = 3^{k+1}t = 3n.$$

Аналогично се проверява, че ако $n = 3^k t$, където $t \equiv 2 \pmod 3$, то $f(f(n)) = 3n$. Следователно функцията $f(n)$ удовлетворява условието.

Инструкции за оценяване: 2 т. за досещането за използване на представянето $n = 3^k t$, където $(t, 3) = 1$; 5 т. за реализиране на конструкцията.

Задача 4. Дадено е уравнението $8^x - m2^{x+1} + 4m = 8$, където m е реален параметър.

а) Да се реши уравнението при $m = 6$.

б) Да се определи при кои стойности на параметъра m, уравнението има точно едно положително решение.

Решение. Полагаме $2^x = t$, $t > 0$, и достигаме до уравнението $t^3 - 2mt + 4m - 8 = 0$

а) При $m = 6$ получаваме $t^3 - 12t + 16 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2(t+4) = 0$, което има единствено положително решение $t = 2 \Rightarrow x = 1$

б) Тъй като $x > 0 \Leftrightarrow t > 1$, то задачата е еквивалентна с това да определим при кои стойности на параметъра m уравнението $t^3 - 2mt + 4m - 8 = 0$ има единствено решение по-голямо от 1. Но $t^3 - 2mt + 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 2t - 2m + 4) = 0$ и така задачата се свежда до откриване на тези стойности на m, за които уравнението $t^2 + 2t - 2m + 4 = 0$ няма реални решения различни от 2 и по-големи от 1.

1 случай) Ако $t = 2$ е решение, то $m = 6$, което от а) е решение.

2 случай) Ако $D = 2m - 3 < 0$, т.е. $m < \frac{3}{2}$ уравнението няма реални решения.

3 случай) Ако $D = 2m - 3 \geqq 0$, т.е. $m \geqq \frac{3}{2}$, то уравнението има реални решения и е необходимо

$$\left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} \leqq 1 \\ a.f(1) \geqq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -1 \leqq 1 \\ 7 - 2m \geqq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow m \leqq \frac{7}{2}$$

Окончателно получаваме $m \in (-\infty; \frac{7}{2}] \cup \{6\}$.

Инструкции за оценяване: 1 т. за полагането $2^x = t$; 1 т. за решаване на уравнението при $m = 6$; 1 т. за отделяне на $t - 2$ като множител; 1 т. за правилно дефиниране на еквивалентната задача касаеща квадратното уравнение; 1 т. за случая $D < 0$, 1 т. за случая $D \geqq 0$, 1 т. за получаване на отговора.

Задача 5. Да се докаже, че за произволни реални положителни числа a, b и c е в сила неравенството

$$\frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ac} + \frac{c^5}{ab} + \frac{3}{2a^2b^2c^2} \geq 2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{9}{2} - 6abc.$$

Кога се достига равенство?

Решение. От неравенството между средното аритметично и средното геометрично за две числа имаме $\frac{a^5}{bc} + abc \geq 2a^3$ и аналогично $\frac{b^5}{ac} + abc \geq 2b^3$ и $\frac{c^5}{ab} + abc \geq 2c^3$. Събираме тези три неравенства и получаваме

$$\frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ac} + \frac{c^5}{ab} + 3abc \geq 2(a^3 + b^3 + c^3). \quad (1)$$

Следователно е достатъчно да докажем неравенство $abc + \frac{1}{2a^2b^2c^2} \geq \frac{3}{2}$.

Полагаме $t = abc > 0$ и получаваме последователно $t + \frac{1}{2t^2} - \frac{3}{2} \geq 0$, $2t^3 - 3t^2 + 1 \geq 0$, $(t-1)^2(2t+1) \geq 0$, като последното очевидно е изпълнено за всяко $t > 0$. С това даденото неравенство е доказано.

Равенство се достига точно когато $a = b = c$ и $abc = t = 1$, т.е. при $a = b = c = 1$.

Инструкции за оценяване: 3 т. за доказване на (1); 1 т. за полагането $abc = t$; 2 т. за доказване на $t + \frac{1}{2t^2} - \frac{3}{2} \geq 0$ при $t > 0$; 1 т. за изследване на случая на равенство.

Задача 6. Равнобедрен трапец с основи 1 и 5 и бедра $\sqrt{7}$ е покрит с 10 кръга с радиус r. Да се докаже, че $r \geq \frac{1}{2}$. („Покрит“ означава, че всяка точка от трапеца се съдържа в поне един от кръговете.)

Решение. Нека трапецът е $ABCD$ с основи $AB = 5$ и $CD = 1$. Лесно се вижда, че височината на $ABCD$ е $\sqrt{3}$. Нека $CDA_1A_2A_3A_4$ е правилен шестоъгълник, разположен така, че да е в една и съща полуравнина с AB относно CD. Да построим и равностранни триъгълници $A_1A_2A_5$ и $A_3A_4A_6$ външно за шестоъгълника (всъщност A_5A_6CD е равнобедрен трапец). Нека O е центърът на шестоъгълника (Фиг. 2).

Фигура 2

Лесно се вижда, че A_2, A_3, A_5 и A_6 лежат върху AB, а A_1, O и A_4 са вътрешни за $ABCD$. Освен това $AA_5 = BA_6 = 1$.

Точките $O, A, B, C, D, A_1, A_2, \ldots, A_6$ са 11 на брой и са покрити от 10-те кръга с радиус r. Следователно поне две от тях са в един и същи кръг. Тъй като минималното разстояние между кои да е две от тези точки е 1, диаметърът на този кръг е поне 1, откъдето $r \geq \frac{1}{2}$.

Инструкции за оценяване: 1 т. за намиране на височината на трапеца; 1 т. за конструирането на правилния шестоъгълник; 1 т. за равностранните триъгълници; 1 т. за съображението, че A_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, са вътрешни за трапеца; 1 т. за намирането на $A_5A = A_6B = 1$; 2 т. за прилагането на принципа на Дирихле за 11-те точки и 10-те кръга. При частични решения – 1-3 т. за идеята за разполагане на точки в трапеца по някакъв критерий; до 2-3 т. за получаването на по-слаби оценки с други конструкции; 1 т. за получаване на оценка с лица.

Задачите са предложени от Петър Бойваленков (Задача 1, 5 и 6) и Стоян Боев (Задачи 2, 3 и 4).

Телефон за връзка: 0899-804-465 (Стоян Боев) и 979-28-06 (Петър Бойваленков).