56. Републиканска олимпиада по математика
Областен кръг, 14-15.04.2007 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване на задачите за 9. клас

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}=x^2-10x+23.$$

Решение. Уравнението има смисъл при $x \in [3,7]$. Лесно се вижда, че $x_1 = 3$ и $x_2 = 7$ са решения.

Нека $x \in (3,7)$ и да запишем уравнението във вида

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}=2-(x-3)(7-x).$$

Тъй като $\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}\right)^2 = 4+2\sqrt{(x-3)(7-x)} > 4$ при $x \in (3,7)$, имаме $\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x} > 2$ за всяко $x \in (3,7)$. От друга страна, $2-(x-3)(7-x) < 2$ за всяко $x \in (3,7)$. Следователно

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x} > 2 > 2-(x-3)(7-x)$$

за всяко $x \in (3,7)$, т.е. уравнението няма решение за $x \in (3,7)$.

Инструкции за оценяване: 1 т. за деклариране на решенията $x_1 = 3$ и $x_2 = 7$; 1 т. за записване на уравнението във вида $\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}=2-(x-3)(7-x)$; по 2 т. за всяка от оценките на лявата и дясната страна, 1 т. за заключението, че няма други решения освен $x_1 = 3$ и $x_2 = 7$.

Задача 2. Четириъгълник $ABCD$ без успоредни страни е вписан в окръжност с радиус 1. Точки $E \in AB$ и $F \in AD$ са такива, че $CE||AD$ и $CF||AB$. Известно е, че окръжността, описана около $\triangle CDF$ пресича за втори път диагонала AC във вътрешна точка. Да се определи най-голямата възможна стойност на израза $AB.AE+AD.AF$.

Решение. Нека описаната окръжност за $\triangle CDF$ пресича AC за втори път в точка L. По първи признак $\triangle ALF \sim \triangle ADC$ и $\triangle ABC \sim \triangle CLF$ ($\sphericalangle BAC = \sphericalangle LCF$, $\sphericalangle FLC = 180^\circ - \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$). Тогава

$$AB.AE+AD.AF=AB.CF+AD.AF=LC.AC+AL.AC=AC^2\leq 4.$$

Равенство се достига, когато AC е диаметър на окръжността, т.е. $\sphericalangle B = 90^\circ$.

Инструкции за оценяване: 1 т. за допълнителното построяване на точка L; 1 т. за подобието $\triangle ALF \sim \triangle ADC$; 2 т. за подобието $\triangle ABC \sim \triangle CLF$; 2 т. за доказването на $AB.AE + AD.AF = AC^2$; 1 т. за съобразяването, че диагоналът AC не надминава диаметъра 2.

Задача 3. Да се намери най-малката възможна стойност на израза

$$M = x + \frac{y^2}{9x} + \frac{3z^2}{32y} + \frac{2}{z},$$

където x, y и z са реални положителни числа. Кога се достига тази най-малка стойност?

Решение. С помощта на неравенството $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, което е вярно за всички положителни a и b (с равенство точно когато $a = b$), последователно получаваме

$$\begin{aligned} M &\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{y^2}{9x}} + \frac{3z^2}{32y} + \frac{2}{z} = \frac{2y}{3} + \frac{3z^2}{32y} + \frac{2}{z} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{2y}{3} \cdot \frac{3z^2}{32y}} + \frac{2}{z} = \frac{z}{2} + \frac{2}{z} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{z}{2} \cdot \frac{2}{z}} = 2. \end{aligned}$$

За да имаме равенство е необходимо и достатъчно да са изпълнени равенствата $x = \dfrac{y^2}{9x}$, $\dfrac{2y}{3} = \dfrac{3z^2}{32y}$ и $\dfrac{z}{2} = \dfrac{2}{z}$. От последното намираме $z = 2$, тогава от второто имаме $y = \dfrac{3}{4}$, а от първото намираме $x = \dfrac{1}{4}$.

Инструкции за оценяване: По 2 т. за всяко от прилаганията на $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; 1 т. за намиране на стойностите, при които се достига най-малката стойност.

Задача 4. Да се докаже, че не съществуват стойности на реалния параметър a, за които системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 = x + ay + 1 \\ y^2 = ax + y + 1 \end{array} \right.$$

има точно три различни решения.

Решение. След почленно изваждане получаваме уравнението $x^2 - y^2 = (1-a)(x-y)$. Ако $x = y$, получаваме квадратното уравнение $x^2 - (a+1)x - 1 = 0$, което има два реални различни корена $x_{1,2} = \dfrac{a + 1 \pm \sqrt{(a+1)^2 + 4}}{2}$. Следователно в този случай системата има две решения.

При $x \neq y$ получаваме последователно

$$\left| \begin{array}{l} x^2 = x + ay + 1 \\ x + y = 1 - a \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x^2 + (a-1)x + a^2 - a - 1 = 0 \\ y = 1 - a - x \end{array} \right. .$$

Тъй като по-горе намерихме две решения, последната система трябва да има единствено решение, за което $x \neq y$, или да има две решения, като точно за едното от тях имаме $x = y$.

В първия случай дискриминантата на квадратното уравнение е равна на 0, т.е. $(1-a)^2 - 4(a^2 - a - 1) = 0 \iff 3a^2 - 2a - 5 = 0$, откъдето $a_1 = -1$, $a_2 = \dfrac{5}{3}$. При $a_1 = -1$ получаваме $x = y = 1$, а при $a_2 = \dfrac{5}{3}$ намираме $x = y = -\dfrac{1}{3}$, т.е. нямаме три различни решения на системата (и двете се получават за съответните стойности на a от първия случай).

Във втория случай дискриминантата е положителна и за да имаме решение с $x = y$, е необходимо $2x = 1 - a$ и $x^2 + (a-1)x + a^2 - a - 1 = 0$, откъдето получаваме $3a^2 - 2a - 5 = 0$, т.е. дискриминантата е нулева и отново нямаме три различни решения.

Инструкции за оценяване: 1 т. за получаване на уравнението $x^2 - y^2 = (1 - a)(x-y)$; 2 т. за извода за две решения в случая $x = y$; 1 т. за достигане до системата $\left| \begin{array}{l} x^2 + (a-1)x + a^2 - a - 1 = 0 \\ y = 1 - a - x \end{array} \right.$; 1 т. за описание на възможностите за получаване на три различни решения; по 1 т. за случая на нулева/ненулева дискриминанта.

Задача 5. Да се намерят всички четни естествени числа n и всички реални a, за които остатъкът при делението на полинома $x^n - x^{n-1} + ax^4 + 1$ на полинома $x^2 - a^2$ е равен на $97 - (a+14)x$.

Решение. От условието следва, че за всяко x е в сила равенството

$$x^n - x^{n-1} + ax^4 + 1 = (x^2 - a^2)g(x) + 97 - (a+14)x,$$

където $g(x)$ е частното от делението. Полагаме $x = a$ и $x = -a$ и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{ll} a^n - a^{n-1} + a^5 & = -a(a+14) + 96 \\ a^n + a^{n-1} + a^5 & = a(a+14) + 96 \end{array} \right. .$$

След почленно събиране и изваждане получаваме уравненията $a^n + a^5 = 96$ и $a^{n-1} = a^2 + 14a$. Очевидно $a = 0$ не е решение и след елиминиране на a^n получаваме $a^5 + a^3 + 14a^2 - 96 = 0$. Проверка на делители на 96 показва, че $a = 2$ е решение на това уравнение и имаме $a^5 + a^3 + 14a^2 - 96 = (a-2)(a^4 + 2a^3 + 5a^2 + 24a + 48)$.

Тъй като

$$a^4 + 2a^3 + 5a^2 + 24a + 48 = a^2(a+1)^2 + 4(a+3)^2 + 12 > 0$$

за всяко реално a, разглежданото уравнение от пета степен няма други реални решения освен $a = 2$. При $a = 2$ получаваме $2^n = 64$, т.е. $n = 6$ и делението е

$$x^6 - x^5 + 2x^4 + 1 = (x^2 - 4)(x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 24) + 97 - 16x.$$

Инструкции за оценяване: 1 т. за записване на равенството от теоремата за деление с частно и остатък на полиноми; 1 т. за полаганията и получаване на системата;

1 т. за получаване на уравнението $a^5 + a^3 + 14a^2 - 96 = 0$; 1 т. за намиране на корена $a = 2$; 2 т. за отхвърляне на възможността за други корени; 1 т. за намиране на $n = 6$

Задача 6. Даден е правилен 16-ъгълник $A_1A_2 \dots A_{16}$, чиито върхове лежат върху окръжност k с център O. Възможно ли е да бъдат избрани част от върховете на 16-ъгълника така, че при последователно завъртане около O на ъгли $\frac{360^\circ}{16}$, $2 \cdot \frac{360^\circ}{16}$, $\dots$, $16 \cdot \frac{360^\circ}{16}$, отсечките, свързващи избраните върхове, да опишат всички страни и диагонали на 16-ъгълника точно по два пъти?

Решение: Виж решението на задача 6 за 10-ти клас.

Инструкции за оценяване: Виж инструкциите към решението на задача 6 за 10-ти клас.

Задачите са предложени от Петър Бойваленков (Задача 1, 3, 4 и 5), Ивайло Кортезов (Задача 2) и Иван Ланджев (Задача 6).

Телефон за връзка: 979-28-06.