МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
56-ТА НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ - 14 април 2007

КРАТКИ ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ
ТЕМА ЗА 7 КЛАС

1 Даден е изразът $A = x^4 + (4-p)x^3 + (8-4p)x^2 - 8px$.

а) Ако $p = 0$, да се докаже, че $A \geq 0$.

б) Да се разложи на множители изразът A.

в) Да се разложи на множители изразът $x^4 + 16x^2 + 64$.

г) Да се разложи на множители изразът $x^4 + 64$.

д) Да се реши уравнението $A = x^4 + 64$ относно x (ако p е параметър).

е) Да се намерят всички цели стойности на p, за които уравнението от (д) има за решение естествено число.

Решение.

а) Получаваме $A = x^4 + 4x^3 + 8x^2 = x^2(x^2 + 4x + 8)$. Понеже изразът в скобите е равен на $(x+2)^2 + 4$, той е по-голям или равен на 4. От друга страна $x^2 \geq 0$ и значи $A \geq 0$. .... (1т.)

б) $A = x(x^3 + 4x^2 + 8x - px^2 - 4px - 8p) = x(x-p)(x^2 + 4x + 8)$. .... (1т.)

в) $x^4 + 16x^2 + 64 = (x^2 + 8)^2$. .... (1т.)

г) $x^4 + 64 = (x^2 + 8)^2 - 16x^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$. .... (1т.)

д) Имаме $x(x-p)(x^2 + 4x + 8) = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$. Според доказаното в (а), $x^2 + 4x + 8 > 0$, така че можем да съкратим на него. .... (1т.)

Получаваме $x^2 - px = x^2 + 8 - 4x$, откъдето $(4-p)x = 8$. При $p = 4$ уравнението няма решение, а при $p \neq 4$ решението е $x = \dfrac{8}{4-p}$. .... (1т.)

е) Трябва $4 - p$ да е естествен делител на 8, т.е. 1, 2, 4 или 8. .... (1т.)

Тогава p е някое от числата 3, 2, 0 или -4. .... (1т.)

2 Даден е квадрат $ABCD$ със страна 1см. На страните му са избрани точки $M \in AB$ и $N \in AD$. В триъгълника CMN са построени височините CK и NL ($K \in MN$, $L \in CM$), като $CK = 1$см. Нека H е пресечната точка на тези височини.

а) Да се докаже, че $DN = KN$.

б) Да се намери периметъра на $\triangle AMN$.

в) Да се намери мярката на $\sphericalangle MCN$.

г) Да се докаже, че $CH = NM$.

Решение. а) $\triangle DNC \cong \triangle KNC$ по признака за правоъгълни триъгълници. .... (1т.)

Така $DN = KN$ и $\sphericalangle DCN = \sphericalangle KCN = x$. .... (1т.)

б) Аналогично $\triangle BMC \cong \triangle KMC$, така че $BM = KM$ и $\sphericalangle BCM = \sphericalangle KCM = y$. .... (1т.)

Сега $AM + MK + KN + NA = AM + MB + DN + NA = 1 + 1 = 2$см. .... (1т.)

в) $2x + 2y = 90^\circ$, така че $\sphericalangle MCN = x + y = 45^\circ$. .... (1т.)

г) от в) $\triangle CLN$ е равнобедрен ($CL = LN$) .... (1т.)

Сега имаме $\triangle CLH \cong \triangle NLM$ по втори признак. Оттук $CH = NM$. .... (1т.)

3 Всяко цяло число е оцветено в бяло, в зелено или в червено, като поне едно число е зелено. При това:

- ако x е бяло, то $x + 1$ е зелено;
- ако x е зелено, то $x + 1$ е червено;
- ако x е червено и y е зелено, то $x + y$ е бяло.

Да се определят цветовете на целите числа от -6 до 6 включително.

Решение. Да определим цвета на числото 0. Ако 0 е зелено, то 1 е червено и значи $1 = 0 + 1$ е бяло, което е противоречие. Ако 0 е червено и y е произволно зелено число, то $y = 0 + y$ е бяло, което е противоречие. Значи 0 е бяло. .... (1т.)

Тогава 1 е зелено, 2 е червено, $3 = 2 + 1$ е бяло. .... (1т.)

Сега 4 е зелено, 5 е червено и $6 = 5 + 1$ е бяло. .... (1т.)

Числото -1 не може да е зелено, защото 0 би било червено. Аналогично -1 не е бяло, значи е червено. (1т.)

Числото -2 не може да е бяло, защото -1 би било зелено. Ако -2 е червено, то $-1 = -2 + 1$ е бяло, което е противоречие. Значи -2 е зелено. Тогава $-3 = -2 + (-1)$ е бяло. .... (1т.)

Числото -4 не може да е зелено, защото -3 би било червено. Аналогично -4 не е бяло, значи е червено. (1т.)

Числото -5 не може да е бяло, защото -4 би било зелено. Ако -5 е червено, то $-4 = -5 + 1$ е бяло, което е противоречие. Значи -5 е зелено. Тогава $-6 = -5 + (-1)$ е бяло. .... (1т.)

Забележка. Може да се докаже, че всяко цяло k, числото $3k$ е бяло, $3k + 1$ е зелено и $3k + 2$ е червено.