МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
56-ТА НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 14 април 2007

КРАТКИ ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

ТЕМА ЗА ШЕСТИ КЛАС

Задача 1. На първия кръг на олимпиадата по математика взели участие всички ученици от шестите класове на едно училище. Броят на учениците, решили и трите предложени задачи, броят на тези, които са решили точно две задачи и броят на тези, които са решили само една задача, се отнасят както 6 : 4 : 3. Само един ученик не решил нито една задача.

До втория кръг били допуснати учениците, решили поне две от задачите. На втория кръг решилите съответно 1, 2 и 3 от предложените три задачи се отнасят както 2 : 4 : 1 и всеки е решил поне една задача.

Колко ученика са решили и трите задачи на втория кръг, ако шестокласниците в това училище не са по-малко от 93 и не са повече от 184?

Решение: От условието следва, че броят на учениците, решили и трите задачи на първия кръг са $6k$, броят на тези, решили две задачи е $4k$, а броят на тези, решили само една задача е $3k$, където k е коефициент на пропорционалност и е естествено число.....**1 точка**

Ясно е, че всички ученици, явили се на първия кръг са $13k+1$ на брой.

До втория кръг били допуснати $6k+4k=10k$ на брой ученици и от тях съгласно условието $2n$ на брой решили една задача, $4n$ - две задачи и n на брой – три задачи (n е естествено число).....**1 точка**

Тогава допуснатите до втори кръг са $7n$, откъдето следва, че броят на допуснатите до втори кръг се дели на 7 и на 10, т.е. на 70, тъй като 7 и 10 са взаимно прости числа.....**2 точки**

Следователно $k=7k_1$ и тогава всички явили се на първи кръг са $13.7k_1+1=91k_1+1$ на брой.

По условие, явилите се ученици са повече от 93, следователно $k_1>1$. От факта, че те са не повече от 184 следва, че $k_1<3$ (ако $k_1\geq 3$, то явилите се са не по-малко от 91.3+1=274). Следователно $k_1=2$ .....**2 точки**

Всички явили се ученици са 91.2+1=183, от тях на втори кръг били допуснати $70k_1=140$,откъдето $n=20$, т.е. решилите и трите задачи на втория кръг са 20.....**1 точка**

Задача 2. В правоъгълна координатна система Oxy са разположени точките $A(0;-1)$, $B(6;5)$, $C(0;5)$, $D(0;3)$ и $F(3;2)$. Правата BD пресича оста Ox в точка E.

а) Да се намери отношението на лицата на $\triangle BCE$ и $\triangle ABE$.

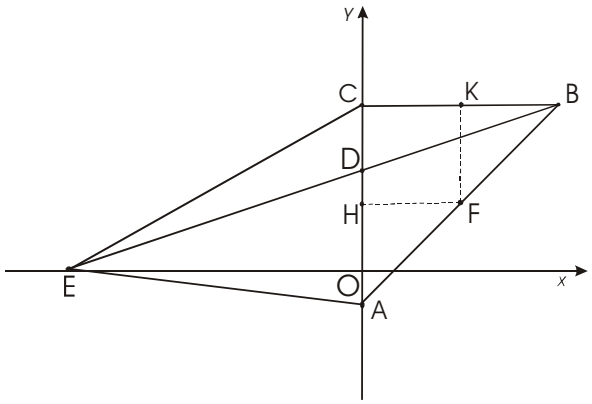
б) Да се намери лицето на $\triangle ACF$ и да се докаже, че точката F е среда на отсечката AB.

Решение: а) $AD=|y_A|+|y_D|=4$ и $CD=y_C-y_D=5-3=2$. Тъй като $\triangle CDE$ и $\triangle DEA$ имат обща височина от точка E, то $\frac{S_{CDE}}{S_{DEA}}=\frac{CD}{DA}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **1 точка**

Аналогично за $\triangle CBD$ и $\triangle ABD$ получаваме $\frac{S_{CDB}}{S_{DBA}}=\frac{CD}{DA}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ .....**1 точка**

math-bg.com

Тогава $S_{CDE}+S_{BCD}=\frac{1}{2}\left(S_{DEA}+S_{BDA}\right)=\frac{1}{2}S_{ABE}$. Тъй като $S_{CDE}+S_{BCD}=S_{BCE}$, то $S_{BCE}=\frac{1}{2}S_{ABE}$ или $\frac{S_{BCE}}{S_{ABE}}=\frac{1}{2}$ ……..**1 точка**



б) $AC=y_C+\left|y_A\right|=5+1=6$.

Нека $FH\perp Oy$ $(H\in Oy)$. Тогава $FH=x_F=3$. Следователно

$S_{ACF}=\frac{AC.FH}{2}=\frac{6.3}{2}=9$ .....**1 точка**

Ще докажем, че F лежи на отсечката AB. Нека $FK\perp BC$ $(K\in BC)$.Тогава

$S_{BCF}=\frac{BC.FK}{2}$, $BC=x_B=6$

$FK=y_B-y_F=5-2=3$. Така получаваме $S_{BCF}=\frac{6.3}{2}=9$. За лицето на фигурата $AFBC$ получаваме $S_{AFBC}=9+9=18$ .....**1 точка**

Да забележим, че $S_{ABC}=\frac{AC.BC}{2}=\frac{6.6}{2}=18$. Тогава, ако F е вътрешна за $\triangle ABC$, ще получим $S_{AFBC}<S_{ABC}$, което е невъзможно, тъй като $S_{AFBC}=S_{ABC}=18$. Аналогично разсъждаваме, ако F е външна за $\triangle ABC$. Следователно F лежи на AB ……..**1 точка**

Тъй като $\triangle AFC$ и $\triangle BCF$ имат обща височина от C, то $\frac{S_{AFC}}{S_{BCF}}=\frac{AF}{FB}$. Но $\frac{S_{AFC}}{S_{BCF}}=\frac{9}{9}=1$, откъдето $\frac{AF}{FB}=1$ или $AF=FB$, т.е. F е среда на AB ……..**1 точка**

Задача 3. На черната дъска са написани 2007 цели числа със сбор 0. Разрешено е да се изтрият произволни 5 числа от тях и на техните места да се запишат съответно: или техните противоположни числа или числата, които са с 1 по-малки от изтритите.

Възможно ли е след няколкократно прилагане на тези две операции:

а) на мястото на кое да е число от дадените да бъде записано числото 0?

б) на дъската да са написани 2007 нули?

Решение: а) Ако числото $a>0$, последователно прилагаме a пъти намаляване с 1 и получаваме 0..... .....**1 точка**

Ако $a<0$, променяме знака и получаваме $-a$, което е положително число. Сега може да приложим $\left|a\right|$ пъти намаляване с 1 и да получим 0. Възможно е също да намалим $-a$ с 1 и отново да променим знака. Тогава ще получим последователно $-a-1=\left|a\right|-1\to-\left(\left|a\right|-1\right)=a+1$. Така числото a се е увеличило с 1. Тази последователност прилагаме $\left|a\right|$ пъти. …….....**2 точки**

б) Избираме число a и четири други числа.

Ясно е, че всяко число може да увеличаваме с 1, или да намаляваме с 1 (от а)). За a и четирите числа може да прилагаме операцията, при която $a\to a+1$ или $a\to a-1$.

Сега за всяко число b и същите четири числа , може да приложим същата операция.

Така ако $b>0$, прилагаме $a\to a+1$ и после $b\to b-1$, а ако $b<0$, прилагаме $a\to a-1$ и после $b\to b+1$.

math-bg.com

Така четирите числа остават непроменени, b се е приближило с една единица към 0 и сумата на всичките числа е 0.....**2 точки**

Като приложим $|b|$ пъти операцията за числото b, на мястото на b ще получим 0 и само числото a ще се е променило. Като приложим това за всяко число b, ще получим нули на местата на всички числа. Ясно е, че и a ще е станало 0 в хода на операциите, тъй като сборът на всички числа е 0..... **2 точки**

math-bg.com