МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
56-ТА НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ - 14 април 2007 г.

---

## ТЕМА 5. КЛАС

## КРАТКИ ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

**1.** Разглеждаме числото $1,23456789101112\dots9899100101$, получено, като са написани последователно естествените числа от 1 до 101 и след първата цифра е поставена десетична запетая.

а) Колко пъти в това число се среща цифрата 0?

б) Колко са цифрите след десетичната запетая на това число?

в) Коя е цифрата на стотното място след десетичната запетая?
Обосновете резултатите си!

**Решение.** Означаваме числото $1,23456789101112\dots9899100101$ с $A$.

а) Девет нули се съдържат в записите на двуцифрените числа, още три в числата 100 и 101. Следователно в числото $A$ цифрата 0 се среща 12 пъти. **2 т.**

б) • За записа на едноцифрените числа от 2 до 9 се използват 8 цифри;
• за записа на двуцифрените числа се използват $2 \cdot 90 = 180$ цифри;
• за записа на числата 100 и 101 се използват 6 цифри.
Общо, след десетичната запетая в $A$, цифрите са $8 + 180 + 6 = 194$. **2 т.**

в) Първите 8 цифри след десетичната запетая в $A$ идват от едноцифрените числа. Следващите 92 цифри са от двуцифрени числа, като стотната цифра е от 46-тото двуцифрено число **1 т.**, което е 45. **1 т.** При това тази цифра е цифрата на единиците, т.е. 5. **1 т.**

**2.** Точките $M$, $N$, $P$, $Q$ са съответно от страните $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ на правоъгълника $ABCD$, при това $ABNQ$ и $BCPM$ са правоъгълници. Освен това $R$ е пресечната точка на $MP$ и $NQ$, а обиколките на $AMRQ$ и $NCPR$ са съответно 56 мм и 1,44 дм.

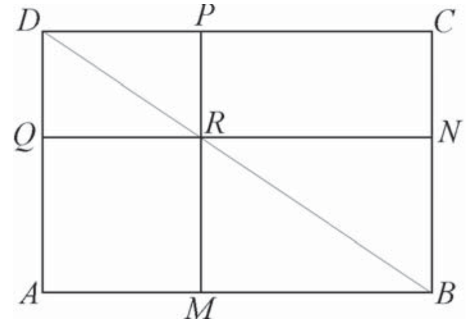
а) На колко сантиметра е равна обиколката на $ABCD$?

б) На колко квадратни сантиметра е равно лицето на $NCPR$, ако $R$ лежи на $BD$ и $RQ = 1,2$ см? Обосновете резултатите си!

**Решение.** а) $AB + BC + CD + DA =$
$AM + MB + BN + NC + CP + PD + DQ + QA =$ **1 т.**
$AM + BN + PD + QA + MB + NC + CP + DQ =$ **1 т.**
$AM + MR + RN + NC + CP + PR + RQ + QA = 5,6 + 14,4 = 20$ см. **1 т.**

б) $RQ + QA = \frac{1}{2} \cdot 5,6 = 2,8$ см $\Longrightarrow QA = 2,8 - 1,2 = 1,6$ см. **1 т.**
$S_{AMRQ} = RQ \cdot QA = 1,2 \cdot 1,6 = 1,92$ кв. см. **1 т.**

Да забележим, че правата $BD$ разполовява лицата на всеки от правоъгълниците $ABCD$, $MBNR$ и $QRPD$. Тогава




$S_{BCD} = S_{ABD}$, $S_{BNR} = S_{MBR}$, $S_{RPD} = S_{QRD}$. **1 т.**

Оттук последователно получаваме

$S_{NCPR} = S_{BCD} - S_{BNR} - S_{RPD} =$
$S_{ABD} - S_{MBR} - S_{QRD} = S_{AMRQ} = 1{,}92$ кв. см. **1 т.**

*Забележка.* Ако е направил подходящ чертеж за всяко от подусловията, ученикът получава по 1 т. на чертеж, но не повече от 2 т. общо.

**3.** На математическо състезание се явили 42 ученици, всеки от които решил поне по една задача от зададените три задачи. Първата задача решили 20 ученици, 18 решили втората, а 15 – третата. От тези, които решили първата задача, нито един не решил втората, а от тези, които решили втората задача, нито един не решил първата. Петима от учениците решили и първата, и третата задача.
а) Колко ученици са решили както втората, така и третата задача? Обосновете резултата си!
б) Колко точки се дават за решаването на втората задача и колко за третата, ако първата носи 5 точки, втората – повече от първата, третата – повече от втората, а общият брой точки, получен от учениците на състезанието, е 361? Обосновете резултата си!

**Решение.** а) Нека $x$ е броят на учениците, които са решили както втората, така и третата задача. Броят на учениците, които са решили точно две задачи, е $5 + x$ (трите задачи не са решени от нито един ученик). По условие
$20 + 18 + 15 = 42 + 5 + x$,
откъдето намираме $x = 6$. **2 т.**

*Забележка.* Ако правилно е направена диаграма „кръгове на Ойлер“, но не е получен верният резултат **1 т.**

б) Нека точките за втората задача са $y$, за третата задача са $z$. Тогава
$20 \cdot 5 + 18y + 15z = 361 \Longrightarrow 18y + 15z = 261 \Longrightarrow$ **2 т.**

Понеже 261 и $18y$ са кратни на 9, трябва и $15z$ да бъде кратно на 9. Тогава $z$ е кратно на 3. По условие $5 < y < z$, което означава, че $y \geq 6$, а тогава $z \geq 9$.

При $z = 9$ намираме $18y = 261 - 15 \cdot 9 = 126$, $y = 7$. **2 т.**

Ако $z$ е някое от следващите кратни на 3, т.е. $z \geq 12$, имаме

$18y \geq 18 \cdot 6 = 108$ и $15z \geq 15 \cdot 12 = 180$,

$18y + 15z \geq 108 + 180 = 288 > 261$,

т.е. равенството $18y + 15z = 261$ не може да бъде изпълнено. **1 т.**

Отговор. За втората задача се дават 7 точки, за третата се дават 9 точки.

*Забележка.* Ако е решено диофатовото уравнение $18y + 15z = 261$ **2 т.**;
ако са отхвърлени решенията $y = 2$, $z = 15$ и $y = 12$, $z = 3$ **1 т.**