56. Национална олимпиада по математика
Областен кръг, 14–15 април 2007 г.
Условия и решения на задачите за 12. клас

Задача 12.1. Да се намерят всички реални числа a, за които съществуват две взаимно перпендикулярни допирателни към графиката на функцията $f(x) = ax + \sin x$.

Решение. Допирателните l_1 и l_2 в точките $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ са взаимно перпендикулярни, ако $f'(x_1)f'(x_2) = -1$. Оттук

$$0 = (a+\cos x_1)(a+\cos x_2)+1 = \left(a + \frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2}\right)^2 + 1 - \frac{(\cos x_1 - \cos x_2)^2}{4}.$$

Понеже $|\cos x_1|, |\cos x_2| \leq 1$, то $|\cos x_1 - \cos x_2| \leq 2$ и следователно $\cos x_1 = -\cos x_2 = \pm 1$ и $a = 0$. Обратно, ако $a = 0$, $x_1 = k\pi$ и $x_2 = l\pi$, където k и l са цели числа от различна четност, то $l_1 \perp l_2$.

Оценяване. 2 т. за $(a + \cos x_1)(a + \cos x_2) = -1$ и 5 т. за довършване на решението (от които 1 т., ако само е намерена дискриминантата на това уравнение спрямо a).

Задача 12.2. В сфера с радиус 2 е вписана пирамида $ABCD$, за която $AB = 2$, $CD = \sqrt{7}$ и $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$. Да се намери ъгълът между правите AD и BC.

Решение. Нека O е центърът на описаната около $ABCD$ сфера, O_1 е средата на AC, E е точката, за която $ABCE$ е правоъгълник, E_1 е средата на AE и O_2 е центърът на описаната около $\triangle AED$ окръжност k. Тъй като $AB \perp AE$ и $AB \perp AD$, следва, че $(ABCE) \perp (AED)$. Значи $E_1O_1OO_2$ е правоъгълник (защо?). Освен това, ясно е, че ъгълът между правите AD и BC е равен на $\angle DAE = \alpha$. От $CE || AB \perp (AED)$ следва, че $DE = \sqrt{DC^2 - CE^2} = \sqrt{3}$ и радиусът на k е $AO_2 = \dfrac{DE}{2\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$. Понеже $AO = 2$ и $OO_2 = O_1E_1 = \dfrac{AB}{2} = 1$, от правоъгълния $\triangle AO_2O$ намираме, че $4 = \dfrac{3}{4\sin^2\alpha} + 1$. Оттук $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\alpha = 30^\circ$.

Оценяване. 2 т. за доказателство, че, $E_1O_1OO_2$ е правоъгълник, 4 т. за получаване на уравнение за $\sin\alpha$ и 1 т. за довършване на решението.

math-bg.com

Задача 12.3. Да се докаже, че ако x и y са цели числа, то числото $x^2(y-2)+y^2(x-2)$ не е просто.

Решение. Лесно се проверява, че $x^2(y-2)+y^2(x-2)$ е четно число. Следователно трябва да докажем, че уравнението $x^2(y-2)+y^2(x-2)=2$ няма решение в цели числа. Да допуснем противното. Полагаме $x-2=a$, $y-2=b$ и получаваме $(ab+4)(a+b+8)=34$. Оттук следва, че $ab=c-4$ и $a+b=\dfrac{34}{c}-8$ т.е. a и b са корени на $t^2+\left(8-\dfrac{34}{c}\right)t+c-4=0$. където $c=\pm1,\pm2,\pm17,\pm34$. Като решим това уравнение, виждаме, че то няма целочислени корени.

Оценяване. 1 т. за това, че числото е четно, 2 т. за $(ab+4)(a+b+8)=34$ и 4 т. за довършване на решението.

Задача 12.4. Нека I е центърът на външновписаната окръжност към страната AB на $\triangle ABC$, а S е симетричната точка на I относно AB. Правата през S, перпендикулярна на BI, пресича правата AI в точка T. Да се докаже, че $CI=CT$.

Решение. Нека $BI\cap ST=K$, а M и N са петите на перпендикулярите от I и C съответно към AC и AI. От $\angle KIS=90^\circ-\angle ABI=\dfrac{\angle ABC}{2}=\angle AIC$, следва, че $\triangle KIS\sim\triangle NIC$. Оттук (1) $\dfrac{IK}{IS}=\dfrac{IN}{IC}$. Понеже $\angle AIB=90^\circ-\dfrac{\angle ACB}{2}=\angle MIC$, то $T\in IA^{\to}$ и $\triangle KIT\sim\triangle MIC$. Следователно (2) $\dfrac{IK}{IM}=\dfrac{IT}{IC}$. От (1), (2) и $IS=2IM$ следва, че $IT=2IN$. Значи N е средата на IT, откъдето $CI=CT$.

Забележка. Ако правата през S, перпендикулярна на AI, пресича правата BI в точка R, то S и C са съответно ортоцентърът и центърът на описаната окръжност на $\triangle ITR$.

Оценяване. По 3 т. за (1) и (2), и 1 т. за довършване на решението.

Задача 12.5. Да се реши уравнението $\dfrac{8^x-2^x}{6^x-3^x}=2$.

Решение. Полагаме $t=2^x$ и $a=\log_2 3$. Уравнението добива вида $\dfrac{t^3-t}{t^a(t-1)}=2$, т.е. $f(t)=2$, $t\neq1$, където $f(t)=\dfrac{t+1}{t^{a-1}}$, $t>0$. Имаме, че $f'(t)=\dfrac{(2-a)t+1-a}{t^a}$. Понеже $a\in(1,2)$ следва, че функцията

math-bg.com

f строго намалява в интервала $\left(0, \dfrac{a-1}{2-a}\right]$ и строго расте в интервала $\left[\dfrac{a-1}{2-a}, +\infty\right)$. Следователно уравнението $f(t) = 2$ най-много по едно решение в тези интервали. Остава да съобразим, че $f(1) = f(2) = 0$, т.е. $x = 1$ е единственото решение на началното уравнение.

Оценяване. 2 т. за $f(t) = 2$, 2 т. за интервалите на монотонност на f и 3 т. за довършване на решението. Да не се точкува само това, че $x = 1$ е решение.

Второ решение. Очевидно $x = 1$ е решение. Ще докажем, че други няма. Фиксираме $x \neq 0, 1$ и записваме условието във вида $f(2) = f(5)$, където $f(t) = t^x + (t+3)^x - 2(t+1)^x$. Достатъчно е да покажем, че $f(t)$ е строго монотонна функция при $t \geq 1$. Имаме, че

$$f'(t) = x(t^{x-1} + (t+3)^{x-1} - 2(t+1)^{x-1}),$$

$$t^{x-1} + (t+3)^{x-1} > 2\sqrt{(t(t+3))^{x-1}},$$

$$t(t+3) \geq (t+1)^2, \quad t \geq 1.$$

Значи ако $t \geq 1$, то $f'(t) > 0$ при $x > 0$, $x \neq 1$ и $f'(t) < 0$ при $x < 0$.

Оценяване. 2 т. за $f(2) = f(5)$, 1 т. за намерена f' и 4 т. за довършване на решението.

Задача 12.6. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такива, че $f(0) \leq 0$ и $f(x+y) \leq x + f(f(y))$ за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Понеже $f(x) \leq x + f(f(0))$, то $M = \sup(f(x) - x) < \infty$. Тогава за всеки $\varepsilon > 0$ и y съществува x така, че $M - \varepsilon < f(x+y) - x - y$. Следователно $M - \varepsilon + x + y < f(x+y) \leq x + f(f(y)) \leq x + f(y) + M$, откъдето $f(y) \geq y$. В частност, $f(0) = 0$ и значи $f(x) \leq x + f(f(0)) = x$. И така, $f(x) = x$, като тази функция изпълнява даденото условие.

Забележка. Ако $c > 0$ и f е такава функция, че $c \leq f(x) - x \leq 2c$, то f изпълнява условието $f(x+y) \leq x + f(f(y))$.

Оценяване. 5 т. за $f(y) \geq y$ и 2 т. за довършване на решението. 3 т. за решение, предполагащо $f(f(0)) \leq 0$.

Автори на задачите: Николай Николов – 12.1, 12.4., 12.5, 12.6, Олег Мушкаров – 12.2, 12.3, 12.4.

Изготвил брошурата: Николай Николов.

math-bg.com