Министерство на образованието и науката

56. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 15 април 2007 г.
11 клас

Задача 4. Дадена е редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, дефинирана с равенствата $a_1 = 4$, $a_2 = 3$ и $2a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$ при $n \geq 2$.

а) Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери нейната граница.

б) Да се пресметне границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{(\sqrt{a_n + 2} - 2)(\sqrt{12a_n - 8} - 2)}.$$

Задача 5. Нека D е точка от страната AB на $\triangle ABC$. Означаваме с P и M центровете на вписаните окръжности съответно за $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, а с Q и N центровете на външновписаните окръжности съответно за $\triangle ADC$ към страната AD и за $\triangle BDC$ към страната BD. Нека K и L са симетричните точки на Q и N спрямо правата AB.

а) Да се докаже, че правите AB, QN и PM или се пресичат в една точка или са успоредни.

б) Да се докаже, че ако точките M, P, K, L лежат на една окръжност, то $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Задача 6. Нека a и b са естествени числа, като $a = 4k + 3$ за някое цяло число k. Да се докаже, че ако уравнението

$$x^2 + (a-1)y^2 + az^2 = b^n$$

има решение в цели положителни числа x, y и z за $n = 1$, то това уравнение има решение в цели положителни числа за всяко естествено число n.

math-bg.com