Министерство на образованието и науката

56. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 14 април 2007 г.
11 клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на параметъра a, за които системата

$$\left|\begin{array}{l}\sin x + \cos y = 4a + 6\\ \cos x + \sin y = 3a + 2\end{array}\right.$$

има решение.

Решение. Повдигаме на квадрат двете равенства и събираме почленно. Получаваме

$$2 + 2\sin x\cos y + 2\cos x\sin y = (4a+6)^2 + (3a+2)^2 = 25a^2 + 60a + 40 = (5a+6)^2 + 4,$$

откъдето $\sin(x+y) = \dfrac{(5a+6)^2}{2} + 1$. Тъй като $1 \geq \sin(x+y) = \dfrac{(5a+6)^2}{2} + 1 \geq 1$, то $\sin(x+y) = 1$ и $(5a+6)^2 = 0$, т.е. $a = -\dfrac{6}{5}$. За тази стойност на a решение са (x_0, y_0), за които $\sin x_0 = \dfrac{3}{5}$, $\cos x_0 = -\dfrac{4}{5}$ и $y_0 = 90^\circ - x_0$,

Задача 2. Нека n е естествено число и $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ са положителни реални числа. Да се докаже неравенството

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n) + 2^{n-1}\left(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \dots + \frac{1}{a_nb_n}\right) \geq 2^{n-1}(n+2).$$

Кога се достига равенство?

Решение. Да разкрием скобите в израза $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)$. Ще получим 2^n събираеми, като всяко число a_i и b_i участва в точно 2^{n-1} събираеми. Тъй като за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ можем да запишем

$$2^{n-1}\frac{1}{a_ib_i} = \underbrace{\frac{1}{a_ib_i} + \frac{1}{a_ib_i} + \dots + \frac{1}{a_ib_i}}_{2^{n-1}},$$

то изразът от ляво може да се представи като сбор на $2^n + n2^{n-1}$ събираеми. При това в произведението на всички тези събираеми всяко от числата a_i и b_i участва в числителя и в знаменателя в степен 2^{n-1}, т.е. произведението на тези събираеми е равно на 1. Сега неравенството от задачата следва от неравенството между средното аритметично и средното геометрично. За да имаме равенство трябва всички 2^n+n2^{n-1} събираеми да са равни. Но ако имаме събираемо от вида a_iT, то имаме и събираемо от вида b_iT, откъдето следва, че $a_i = b_i$ за всяко i. Оттук и от $\dfrac{1}{a_ib_i} = \dfrac{1}{a_jb_j}$ следва, че $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b_1 = b_2 = \cdots = b_n = c$. Тъй като всички събираеми сега са от вида c^n или $\dfrac{1}{c^2}$, то $c^n = \dfrac{1}{c^2}$, откъдето $c = 1$. Следователно равенство се достига когато всички числа са равни на 1.

Задача 3. За множество A от реални числа означаваме с A^+ броят на различните числа, които могат да се получат като сбор на две (не непременно различни) числа от A, а с A^- броят на различните положителни числа, които могат да се получат като разлика на две числа от A. Нека A е такова множество с 2007 елемента, за което A^+ приема минимална възможна стойност. Да се намери A^-.

Решение. Нека $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, като $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Тъй като

$$a_n + a_n > a_n + a_{n-1} > \cdots > a_n + a_1 > a_{n-1} + a_1 > a_{n-2} + a_1 > \cdots > a_2 + a_1 > a_1 + a_1,$$

то в M има поне $2.n - 1$ различни сборове. Ще докажем с индукция по $n \geq 3$, че елементите на всяко множество с n елемента, имащо $2n - 1$ различни сборове, образуват в някакъв ред аритметична прогресия.

1. При $n = 3$ имаме 5 различни сбора $a_3+a_3 > a_3+a_2 > a_3+a_1 > a_1+a_2 > a_1+a_1$. Тъй като $2a_2$ трябва да съвпада с някой от тези сборове и $a_3 + a_2 > 2a_2 > a_1 + a_2$, то единствената възможност е $2a_2 = a_1 + a_3$, т.е. числата образуват аритметична прогресия.

2. Нека твърдението е вярно за $n = k$, т.е. елементите на всяко множество M, за което $M^+ = 2k - 1$ образуват в някакъв ред аритметична прогресия.

3. Да разгледаме множество с $n = k+1$ елемента, в което има $2(k+1)-1 = 2k+1$ различни сборове. Тъй като $a_{k+1}+a_{k+1}$ и $a_{k+1}+a_k$ са различни сборове и са по-големи от всеки сбор от вида $a_i + a_j$ за $i, j \leq k$, то в множеството $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ има най-много (следователно точно) $2k-1$ различни сборове. Следователно $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ образуват аритметична прогресия. Тогава $a_{k+1} + a_{k-1}$ може да бъде равно само на $2a_k$, което означава, че всички числа образуват аритметична прогресия.

Следователно елементите на множеството от условието на задачата образуват аритметична прогресия с 2007 члена. За аритметична прогресия с 2007 члена лесно пресмятаме, че броят на различните положителни числа, които могат да се получат като разлика на две числа е точно 2006, т.е. $A^- = 2006$.

Министерство на образованието и науката

56. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 15 април 2007 г.
11 клас

Задача 4. Дадена е редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, дефинирана с равенствата $a_1 = 4$, $a_2 = 3$ и $2a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$ при $n \geq 2$.

а) Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери нейната граница.

б) Да се пресметне границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{(\sqrt{a_n + 2} - 2)(\sqrt{12a_n - 8} - 2)}.$$

Решение. а) Записваме рекурентната връзка във вида $2a_{n+1} - a_n = 2a_n - a_{n-1}$, откъдето получаваме

$$2a_{n+1} - a_n = 2a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - a_{n-2} = \cdots = 2a_2 - a_1 = 2.$$

Оттук $a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n}{2}$ и следователно

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \frac{a_n}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}}{4} = \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{a_1}{2^n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2^n} + \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = 2 + \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

За общият член на редицата получаваме $a_n = 2 + \dfrac{1}{2^{n-2}}$, което означава, че редицата е сходяща и нейната граница е числото 2.

б) Тъй като

$$\begin{aligned} \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{(\sqrt{a_n + 2} - 2)(\sqrt{12a_n - 8} - 2)} &= \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)(\sqrt{a_n + 2} + 2)}{(\sqrt{a_n + 2} - 2)(\sqrt{a_n + 2} + 2)(\sqrt{12a_n - 8} - 2)} \\ &= \frac{(a_n - 1)(\sqrt{a_n + 2} + 2)}{\sqrt{12a_n - 8} - 2}, \end{aligned}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-1)(a_n-2)}{(\sqrt{a_n+2}-2)(\sqrt{12a_n-8}-2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-1)(\sqrt{a_n+2}+2)}{\sqrt{12a_n-8}-2}$$

$$= \frac{(2-1)(\sqrt{2+2}+2)}{\sqrt{12.2-8}-2} = 2.$$

Задача 5. Нека D е точка от страната AB на $\triangle ABC$. Означаваме с P и M центровете на вписаните окръжности съответно за $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, а с Q и N центровете на външновписаните окръжности съответно за $\triangle ADC$ към страната AD и за $\triangle BDC$ към страната BD. Нека K и L са симетричните точки на Q и N спрямо правата AB.

а) Да се докаже, че правите AB, QN и PM или се пресичат в една точка или са успоредни.

б) Да се докаже, че ако точките M, P, K, L лежат на една окръжност, то $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Решение. а) Точките P и Q лежат на ъглополовящата на $\measuredangle ACD$, а точките M и N лежат на ъглополовящата на $\measuredangle BCD$. Да означим $F = CQ \cap AB$ и $E = CN \cap AB$.

Нека PM пресича AB в точка T. От теоремата на Менелай за $\triangle CFE$ и правата PM получаваме

$$\frac{CP.FT.EM}{PF.TE.MC} = 1.$$

Тъй като $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{PF}{QF}$ (и двете отношения са равни на $\dfrac{r_{ADC}}{r}$ където r е радиусът на външновписаната окръжност за $\triangle ADC$ към AD), то $\dfrac{CP}{PF} = \dfrac{CQ}{QF}$ и аналогично $\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{ME}{NE}$, откъдето $\dfrac{EM}{MC} = \dfrac{EN}{NC}$. Следователно

$$1 = \frac{CP.FT.EM}{PF.TE.MC} = \frac{CQ.FT.EN}{QF.TE.NC},$$

което по теоремата на Менелай за $\triangle CFE$ и точките N, Q и T означава, че N, Q и T лежат на една права. По същия начин, ако NQ пресича AB, то MP също минава през тази точка. Следователно правите PM, AB и QN или са успоредни, или се пресичат в една точка.

б) Ще покажем, че M, P, K и L лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато M, P, Q и N лежат на една окръжност. Ако $QN \parallel AB \parallel PM$, то и $KL \parallel AB$. Тъй като $QNMP$ е равнобедрен трапец тогава и само тогава, когато $PMLK$ е равнобедрен трапец, то $QNMP$ е вписан тогава и само тогава, когато $PMLK$ е вписан.

Ако QN, AB и PM се пресичат в точка T, то и KL минава през същата точка. Тъй като $TK = TQ$ и $TL = TN$, то

$$TP.TM = TK.TL \iff TP.TM = TQ.TN.$$

Следователно M, P, Q и N лежат на една окръжност. Освен това Q, D и M лежат на една права (ъглополовящата на $\sphericalangle BDC$), а N, D и P също лежат на една права (ъглополовящата на $\sphericalangle ADC$). Оттук $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QDP = \sphericalangle NDM = \sphericalangle NBM = 90^\circ$, т.е. $AQDP$ и $BNDM$ са вписани четириъгълници.

Следователно $\dfrac{\sphericalangle BAC}{2} = \angle DAP = \angle PQD = \sphericalangle PNM = \sphericalangle DBM = \dfrac{\sphericalangle ABC}{2}$, т.е. триъгълникът е равнобедрен.

Задача 6. Нека a и b са естествени числа, като $a = 4k + 3$ за някое цяло число k. Да се докаже, че ако уравнението

$$x^2 + (a-1)y^2 + az^2 = b^n$$

има решение в цели положителни числа x, y и z за $n = 1$, то това уравнение има решение в цели положителни числа за всяко естествено число n.

Решение. Да забележим, че ако $x_n^2+(a-1)y_n^2+az_n^2 = b^n$, то за $x_{n+2} = x_n.b$, $y_{n+2} = y_n.b$ и $z_{n+2} = z_n.b$ имаме $x_{n+2}^2 + (a-1)y_{n+2}^2 + az_{n+2}^2 = b^{n+2}$. Следователно е достатъчно да докажем, че ако уравнението $x^2 + (a-1)y^2 + az^2 = b$ има решение, то има решение и уравнението $x^2 + (a-1)y^2 + az^2 = b^2$.

Нека x_0, y_0 и z_0 са такива, че $x_0^2+(a-1)y_0^2+az_0^2 = b$. Тъй като е в сила тъждеството

$$((a-1)y^2 + az^2 - x^2)^2 + (a-1)(2yx)^2 + a(2zx)^2 = ((a-1)y^2 + az^2 + x^2)^2,$$

то $X = (a-1)y_0^2 + az_0^2 - x_0^2$, $Y = 2y_0x_0$ и $Z = 2z_0x_0$ е решение на уравнението $x^2 + (a-1)y^2 + az^2 = b^2$.

Остава да покажем, че $X = (a-1)y_0^2+az_0^2-x_0^2 \neq 0$. Ако $X = 0$, то $a(y_0^2+z_0^2) = x_0^2+y_0^2$. Тъй като $a = 4k+3$, то a има прост делител p от вида $4t+3$, който влиза в каноничното разлагане на a в нечетна степен. Ще използваме известния факт, че ако $p = 4t + 1$ дели $x_0^2 + y_0^2$, то p дели x_0 и y_0. Следователно в каноничното разлагане на $x_0^2 + y_0^2$ простото число p влиза с четна степен. Същото важи и за каноничното разлагане на $y_0^2 + z_0^2$. Получихме, че степента на p в $a(y_0^2 + z_0^2)$ и в $x_0^2 + y_0^2$ са с различна четност, което е противоречие.

Критерии за оценяване

Задача 1. За повдигане на квадрат и събиране (същия резултат може да се получи и след изразяване на $\sin x$ от първото уравнение, изразяване на $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и повдигане на квадрат.) – 2 т.

За изразяване на $\sin(x+y)$ и оценката на дясната част, т.е. $\dfrac{25a^2+60a+38}{2} \geq 1$ – 3 т.

За получаване $a = -\dfrac{5}{6}$ – 1 т.

За доказване, че при $a = -\dfrac{5}{6}$ има решение – 1 т.

Задача 2. За представянето $2^{n-1}\dfrac{1}{a_ib_i} = \underbrace{\dfrac{1}{a_ib_i} + \dfrac{1}{a_ib_i} + \cdots + \dfrac{1}{a_ib_i}}_{2^{n-1}}$ – 2 т.

За наблюдението, че всеки множител при разкриването на скобите се появява в точно 2^{n-1} събираеми – 1 т.

За прилагане на неравенството между средното аритметично и средното геометрично – 3 т.

За определяне кога се достига равенство – 1 т.

За частни случаи – максимум 1 т.

Задача 3. За определяне, че има поне $2n-1$ различни сборове – 2 т.

За доказване, че множество с минимален брой различни сборове е аритметична прогресия – 4 т.

За пресмятане на A^- – 1 т.

Задача 4.

За а) – 4 т.

За б) – 3 т.

Задача 5. За а) – 3 т. За б) – 4 т. от които:

За доказване, че M, P, Q и N лежат на една окръжност – 2 т.

За останалата част – 2 т.

Задача 6. За наблюдението, че е достатъчно да се докаже, че има решение само за $n = 2$ – 1 т.

За намиране на решение за $n = 2$ от решение за $n = 1$ – 3 т.

За доказване, че в новото решение числата не са 0 – 3 т.

Задачите са предложени от: 1, 3, 4 – Емил Колев; 2, 5, 6 – Александър Иванов. Телефон за връзка: 0888919497 (Емил Колев).

Автор на брошурата: Емил Колев.