

56. Републиканска Олимпиада по Математика  
Областен кръг, Първи ден, 14.04.2006 г.  
X клас

1. Да се намерят всички стойности на  $x$ , за които е изпълнено неравенството

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 6x + 1} + 5x - 15}{2x - 5} \geq 2.$$

2. Даден е  $\triangle ABC$ , в който с  $D, E$  и  $F$  са означени допирните точки на външно вписаните окръжности съответно към страните  $BC, CA$  и  $AB$ .

(a) Да се докаже, че правите  $AD, BE$  и  $CF$  се пресичат в една точка.

(b) Ако пресечната точка на правите  $AD, BE$  и  $CF$  лежи върху вписаната окръжност за триъгълника, да се докаже, че периметърът му е четири пъти по-голям от най-малката му страна.

3. Естествените числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $n \geq 3$ , са такива, че

$$b_1 = \frac{a_n + a_2}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 + a_3}{a_2}, \dots, b_n = \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n}$$

са цели числа. Да се докаже, че  $b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq 3n - 1$ .