МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

56. Републиканска Олимпиада по Математика

Областен кръг, 14-15.04.2007 г.

Условия и решения на задачите за X клас

1. Да се намерят всички стойности на x, за които е изпълнено неравенството

$$\frac{\sqrt{-x^2+6x+1}+5x-15}{2x-5} \geq 2.$$

Решение. Допустимите стойности за x се получават от условията $-x^2+6x+1 \geq 0$ и $2x-5 \neq 0$. Това са всички $x \in [3-\sqrt{10}, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, 3+\sqrt{10}]$.

1 случай. Нека $x > \frac{5}{2}$. Тогава имаме

$$\sqrt{-x^2+6x+1} \geq -x+5.$$

Ако $x > 5$, то неравенството е очевидно изпълнено тъй като лявата страна е положителна, а дясната – отрицателна. Ако $x \leq 5$, повдигаме в квадрат и получаваме $x^2-8x+12 \leq 0$, т.е. $x \in [2,6]$. Решение в този случай е всяко $x \in (\frac{5}{2}, 6]$.

2 случай. Нека $x < \frac{5}{2}$. Сега $\sqrt{-x^2+6x+1} \leq -x+5$. Дясната страна е положителна и можем да повдигнем в квадрт. Получаваме $x^2-8x-12 \geq 0$, т.е. $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$. В този случай решение е всяко $x \in [3-\sqrt{10}, 2]$.

Окончателно $x \in [3-\sqrt{10}, 2] \cup (\frac{5}{2}, 6]$.

2. Даден е $\triangle ABC$, в който с D, E и F са означени допирните точки на външно вписаните окръжности съответно към страните BC, CA и AB.

(*a*) Да се докаже, че правите AD, BE и CF се пресичат в една точка.

(*b*) Ако пресечната точка на правите AD, BE и CF лежи върху вписаната окръжност за триъгълника, да се докаже, че периметърът му е четири пъти по-голям от най-малката му страна.

Решение. (*a*) Нека a, b, c са дължините на страните на страните на триъгълника. От свойствата на допирателните отсечки имаме $AF = p-b$, $BF = p-a$, $BD = p-c$, $CD = p-b$, $CE = p-a$, $AE = p-c$ и твърдението следва от теоремата на Чева.

(b) Без ограничение на общността нека b е най-малката страна в $\triangle ABC$. Да означим пресечната точка на AD, BE и CF с N. Нека освен това P, Q и R са допирните точки на вътрешно вписаната окръжност съответно със страните AB, BC и AC. Лесно се съобразява, че N лежи на дъгата PQ, несъдържаща точката R. Известно е, че ако QQ' е диаметър на вътрешно вписаната окръжност, то Q' лежи на AD. (Да се докаже!) Използвайки още веднъж този резултат, получаваме, че RN е диаметър на вписаната окръжност. Следователно $RQ'NQ$ е правоъгълник. Сега $\angle CAD = \angle CDA$, откъдето $p - b = b$ и $2p = 4b$.

3. Естествените числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geq 3$, са такива, че

$$b_1 = \frac{a_n + a_2}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 + a_3}{a_2}, \ldots, b_n = \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n}$$

са цели числа. Да се докаже, че $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leq 3n - 1$.

Решение. Индукция по n. За $n = 3$ можем да предположим, че a_3 е най-голямото от числата a_1, a_2, a_3. Имаме $b_3 = (a_2 + a_1)/a_3 \leq (a_3 + a_3)/a_3 = 2$. Следователно $b_3 = 2$ ($a_1 = a_2 = a_3$) и $S = 6$ или $b_3 = 1$ ($a_1 + a_2 = a_3$). Във втория случай

$$b_1 = \frac{a_3 + a_2}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1} = 1 + \frac{2a_2}{a_1}; b_2 = \frac{a_1 + a_3}{a_2} = \frac{2a_1 + a_2}{a_2} = 1 + \frac{2a_1}{a_2}.$$

Тъй като $(2a_2/a_1)(2a_1/a_2) = 4$ получаваме, че $2a_2/a_1 = 1, 2$ или 4. Във всеки от тези три случая имаме $S \leq 8$.

Нека $n > 3$ и нека сме доказали твърдението за $n - 1$ числа. За да можем да приложим индукционното допускане, т.е. че

$$\begin{aligned} S' &= \frac{a_{n-1} + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_3}{a_2} + \frac{a_{n-2} + a_1}{a_{n-1}} \\ &= b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_{n-1} \leq 3(n-1) - 1, \end{aligned}$$

трябва да сме сигурни, че числата b'_i са цели, т.е. че числата

$$b'_1 = \frac{a_{n-1} + a_2}{a_1}, \quad b'_{n-1} = \frac{a_{n-2} + a_1}{a_{n-1}}$$

са цели. Нека a_n е максималното от числата a_{n-1}, a_n, a_1. Тогава

$$b_n = \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n} \leq \frac{a_n + a_n}{a_n} = 2$$

и $b_n = 1$ или 2. Ако $b_n = 2$ имаме $a_1 = a_{n-1} = a_n$, т.е. $b'_1 = b_1$ и $b'_{n-1} = b_{n-1}$. Оттук следва, че

$$S = S' + b_n = S' + 2 \leq 3n - 4 + 2 = 3n - 2.$$

Ако $b_n = 1$ имаме $a_1 + a_{n-1} = a_n$ и следователно

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_n + a_2}{a_1} = \frac{a_{n-1} + a_1 + a_2}{a_1} = 1 + \frac{a_{n-1} + a_2}{a_1} = 1 + b'_1 \\ b_{n-1} &= \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2} + a_1 + a_{n-1}}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2} + a_1}{a_{n-1}} = 1 + b'_{n-1}. \end{aligned}$$

Числата b'_1 и b'_{n-1} са цели и, следователно, съгласно индукционното допускане

$$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + 1 = (1 + b'_1) + b'_2 + \ldots + (1 + b'_{n-1}) + 1 = S' + 3 \leq 3n - 1.$$

4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\log_{x-a}(x + a) = 2$$

има точно едно решение.

Решение. Полагаме $y = x - a$. Задачата е еквивалентна на това да определим, за кои стойности на реалния параметър a уравнението $\log_y(y + 2a) = 2$ има единствено решение. Това е еквивалентно със съществуването на единствено решение на $y^2 - y - 2a = 0$, удовлетворяващо условията $y > 0$, $y > -2a$, $y \neq 1$.

1. случай. $D = 1 + 8a = 0$. Тогава $a = -1/8$ и достигаме до решението $y = 1/2$, което очевидно удовлетворява условията.

2. случай. $D > 0$, т.е. $a > -1/8$. Нека $f(y) = y^2 - y - 2a$. Ако $a \in (-1/8, 0]$, то $-2a \geq 0$ и необходимо и достатъчно условие е $-2a$ да лежи между корените на $f(y)$, т.е. $f(-2a) = 4a^2 < 0$, противоречие. Ако $a \in (0, +\infty]$, то $-2a < 0$ и необходимо и достатъчно условие е 0 да лежи между корените на тричлена, т.е. $f(0) = -2a < 0$, което е изпълнено.

Окончателно търсените стойности са $a \in (0, +\infty) \cup \{-\frac{1}{8}\}$.

5. Да се намери броят на двойките от естествени числа (m, n), които са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} 47^m - 48^n + 1 \equiv 0 \pmod{61} \\ 3m + 2n = 1000 \end{array} \right. .$$

Решение. Лесно се проверява, че $48^2 \equiv 47 \pmod{61}$ и $48^6 \equiv 1 \pmod{61}$. Следователно, сравнението от условието може да бъде записано във вида $48^{2m} - 48^n + 1 \equiv 0 \pmod{61}$. Чрез непосредствена проверка установяваме, че n не се дели на 2 и на 3. Следователно от

$$0 \equiv 48^{6n} - 1 = (48^{3n} - 1)(48^n + 1)(48^{2n} - 48^n + 1) \pmod{61}$$

получаваме, че $(48^{2n} - 48^n + 1) \pmod{61}$. Сега $48^{2(m-n)} \equiv 1 \pmod{61}$, откъдето $m \equiv n \pmod 3$. Тъй като n не се дели на 2 и 3, получаваме следните възможност за m и n:

$$m = 6k+1, n = 6k+1,\ m = 6k+4, n = 6k+1,\ m = 6k+2, n = 6k+5,\ m = 6k+5, n = 6k+5.$$

Уравнението $3m+2n = 1000$ има решение точно когато $m = 6k+2, n = 6k+5$. Понататък имаме $3(6k+2)+2(6l+5) = 1000$, откъдето $3k+2l = 164$. Решения, които са естествени числа на последното уравнение се получават за $k = 0, 2, 4, \ldots, 54$, т.е. общият им брой е 28.

6. Даден е правилен 16-ъгълник $A_1A_2 \ldots A_{16}$, върховете на който лежат върху окръжност k с център O. Възможно ли е да бъдат избрани част от върховете на шеснадесетоъгълника, така че при последователно завъртане около O на ъгли $\frac{360^\circ}{16}$, $2 \cdot \frac{360^\circ}{16}$, $\ldots$, $16 \cdot \frac{360^\circ}{16}$, отсечките, свързващи избраните точки да опишат всички страни и диагонали на 16-ъгълника точно по два пъти?

Решение. Задачата може да се преформулира така: съществува ли подмножество на $\{0, 1, \ldots, 15\}$, за което всевъзможните разлики $a_i - a_j \pmod{16}$ описват точно по два пъти всички ненулеви остатъци. Очевидно е, че търсеното подмножество е 6-елементно.

Да означим с m_i, $i = 0, 1, 2, 3$, броя на числата в търсеното множество, които дават остатък i при делене на 4. Имаме $\sum m_i = 6$, $\sum m_i(m_i - 1) = 6$, $\sum m_i m_{i+1} = \sum m_i m_{i+2} = \sum m_i m_{i+3} = 8$. Оттук получаваме две възможности:

$$(m_0, m_1, m_2, m_3) = (3, 1, 1, 1), (1, 3, 1, 1), (1, 1, 3, 1), (1, 1, 1, 3)$$

или

$$(m_0, m_1, m_2, m_3) = (0, 2, 2, 2), (2, 0, 2, 2), (2, 2, 0, 2), (2, 2, 2, 0).$$

Нека търсеното множество е $A = \{a_1, \ldots, a_6\}$. Без ограничение на общността можем да считаме, че четири от числата a_i са четни, а две нечетни. Освен това можем да приемем, че $a_1 = 0$, а a_2, a_3, a_4 са останалите четни числа. Разликите $a_i - a_j \pmod{16}$, $1 \leq i, j \leq 4$ описват всички четни остатъци по два пъти с изключение на два. Липсващите остатъци са:

(i) 2 и 14; (ii) 4 и 12, (iii) 6 и 10, (iv) два пъти 8.

Случай (iii) е еквивалентнен на случай (i), тъка то се получава от него чрез умножение с 3 по модул 16. за упростяване можем да разглеждаме множество $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $b_i = a_i/2$, с елементи от $\{0, 1, \ldots, 7\}$ в което липсващите разлики по модул 8 са разликите от (i)–(iv) разделени на 2. Освен това във всички случаи можем да считаме $b_0 = 0$, $b_1 = 1$.

Лесно се получава, че в случай (i) имаме $B = \{0, 1, 4, 6\}$, в случай (ii) – $B = \{0, 1, 4, 7\}$, а случай (iv) е невъзможен. Така получаваме две възможности за A:

(1) $A = \{0, 2, 8, 12, x, y\}$;

(2) $A = \{0, 2, 8, 14, x, y\}$,

където x, y са две нечетни числа различаващи се с 2 в първия и 4 във втория случай. С непосредствена проверка се убеждаваме, че както и да избираме нечетните числа x, y не получаваме множество с желаното свойство.

Критерии за оценяване:

Задача 1:

Получаване на точните интервали за x – 7 точки.

Пропускане на възможни стойности на x – отнемане на 2 точки.

Задача 2:

Подусловие (а) - 1 точка

Подусловие (б) - 6 точки.

Ако не е доказано, че Q' лежи на AD, а този факт е използван наготово се отнемат 2 точки.

Задача 3: Идея за използване на индукция – 1 точка.

Доказване на базата на индукцията – 2 точки.

Доказване на индукционната стъпка – 4 точки.

Задача 4:

Свеждане до квадратно уравнение – 2 точки.

Откриване на стойността $a = -\frac{1}{8}$ – 2 точки.

Намиране на останалите стойности за a – 3 точки.

Задача 5:

Намиране на всички решения на сравнението – 4 точки.

Намиране на броя на решенията на сравнението, които удовлетворяват и уравнението – 3 точки.

Пропускане на възможни решения на сравнението – 1 или 2 точки в зависимост от това, колко са пропуснати.

Задача 6:

Преформулиране на задачата като задача за остатъци по модул 16 – 1 точка.

Получаване на връзки за разпределение на остатъците от 6-елементното множество, което трябва да бъде избрано - 2 точки.

Налучкване на верния отговор не се премира с точки.