ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ – БУРГАС, 2007 г.

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

6. КЛАС

6.1. В един паркинг броят на червените коли е 25% от всички коли. В продължение на един час от паркинга излизат и влизат някои коли , като в края на часа се оказало, че броят на паркираните коли се е увеличил с 3, а червените коли представляват 12% от всички паркирани коли. Какъв най-малък брой коли са били паркирани първоначално и колко от тях са били червени?

Решение: Да означим с n търсеният брой коли. (**1 т.**) Понеже 25% или иначе казано $\frac{1}{4}$ са били червени, то числото n е кратно на 4. (**3 т.**) От представянето $\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$ следва, че числото $n+3$ се дели на 25. (**3 т.**) Търсим сега число, кратно на 25, такова, че ако извадим от него 3 да се получи число, кратно на 4. **(1 т.)** Измежду естествените числа кратни на 25: 25, 50, 75, 100 ,... най-малкото с исканото свойство е 75. За него разликата $75-3$ = 72 е кратна на 4, т.е. първоначално са били паркирани 72 коли **(2 т.)**, а от тях 72:4 = 18 са били червени **(1 т.)**.

6.2. Да се намерят всички двойки естествени числа *m* и *n*, за които е изпълнено $1!+2!+3!+\cdots+n!=m^2$**.**

(с *n*! се означава произведението на естествените числа от 1 до *n*: $n!=1.2.3.\cdots.(n-1).n$ **)**

***Решение*:** Нека $n=1$. Тогава $1!=1=m^2$ и $m=1$. **(1 т.)**
Нека $n=2$. Тогава $1!+2!=3=m^2$ и няма естествено число, за което $m^2=3$. **(1 т.)**
Нека $n=3$. Тогава $1!+2!+3!=9=m^2$ и $m=3$. **(1 т.)**
Нека $n\geq 4$. Тогава $1!+2!+3!+4!=33$ **(1 т.)**. Освен това 5!, 6!, и т. н. завършват на 0. **(2 т.)** Следователно $1!+2!+3!+4!+\cdots+n!$ завършва на 3. **(2 т.)** Но квадрата на никое естествено число не завършва на 3, т. е. няма естествено число, за което $1!+2!+3!+\cdots+n!=m^2$. **(1 т.)** Окончателно решения на задачата са двойките (1;1) и (3;3). **(1 т.)**

6.3. В триъгълника *ABC* точка *P* е средата на страната *BC*, а точка *T* е от страната *AC* и $AT=4TC$**. Отсечките *AP* и *BT* се пресичат в точка *M*. Да се намери каква част от лицето на четириъгълника *TMPC* е лицето на триъгълника *CPM*.**

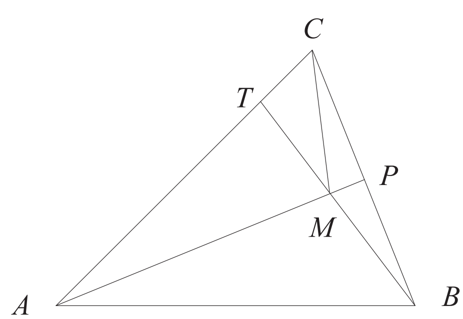
Решение: Означаваме лицето $S_{TCM}=S$. Тъй като $AT=4.TC$, то $S_{ATM}=4S$ **(1 т.)** и $S_{ACM}=5S$ **(1 т.)**.

Точка *P* е средата на *BC*, следователно

$$\left.\begin{array}{l} S_{APC}=S_{APB} \\ S_{MPC}=S_{MPB} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABM}=S_{ACM}=5S$$ **(2 т.)**

$S_{ABT}=S_{ABM}+S_{ATM}=5S+4S=9S$ **(1 т.)**,

$S_{ABT}=4S_{BTC} \Rightarrow S_{BTC}=\frac{9}{4}S$ **(1 т.)**.



$$S_{BMC} = S_{BTC} - S_{TCM} = \frac{9}{4}S - S = \frac{5}{4}S \text{ } \mathbf{(1т.)} \Rightarrow S_{CPM} = \frac{1}{2}S_{BMC} = \frac{5}{8}S \text{ } \mathbf{(1 т.)}.$$

Тогава $S_{TMPC} = S_{TCM} + S_{CPM} = S + \frac{5}{8}S = \frac{13}{8}S$ **(1 т.)** и $S_{CPM} = \frac{5}{13}S_{TMPC}$ **(1 т.)**.

6.4. На дъската е записано числото 4608. Всяка минута числото от дъската се умножава или дели (само ако делението е възможно без остатък) на 2 или на 3. Резултатът се записва на дъската, а старото число се изтрива. Възможно ли е точно след 33 часа и 27 минути на дъската да е записано числото 27? След най-малко колко минути числото 27 може да се появи на дъската?

***Решение*:** Забелязваме най-напред, че числото 4608 се разлага на прости множители по следния начин 4608 = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.3.3, т.е. 9 двойки и 2 тройки. **(2 т.)** Общият брой на простите делители е равен на 9 + 2 = 11 – нечетно число. **(2 т.)** След всяка минута броят на тези прости делители се променя с 1 (или в повече, или в по-малко), което показва, че ако в предната минута броят на простите делители е бил нечетен, той става четен и обратно. **(3 т.)** Времето от 33 часа и 27 минути (между впрочем точно 2007 минути) съдържа нечетен брой минути. – **(1 т.)**, т. е. числото на дъската трябва да съдържа четен брой прости делители, а 27 = 3.3.3 е с нечетен брой прости делители. Следователно не е възможно да се достигне това число в исканото време. **(2 т.)** За да се получи 27 трябва от числото 4608 да отделим 9-те двойки и да добавим една тройка. Следователно най-краткия срок е 9 +1 = 10 минути. **(1 т.)**