ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ – БУРГАС, 2007 г.

КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ
4. КЛАС

4.1. Двадесет на брой петици са записани една след друга: 5 5 5 ... 5 5. Напишете между някои от цифрите знака „+”, така че полученият сбор да е равен на 1000. (За цифрите, между които не е написан знак, считаме, че образуват едно число.)

Решение. 1. Ако всички събираеми са едноцифрени числа, получаваме $\underbrace{5+5+\cdots+5}_{20}=100\neq 1000$. **(2 т.)**

2. Ако всички събираеми са едноцифрени или двуцифрени числа, получаваме най-много $\underbrace{55+55+\cdots+55}_{10}=550\neq 1000$ (защото 5+5<55). **(2 т.)**

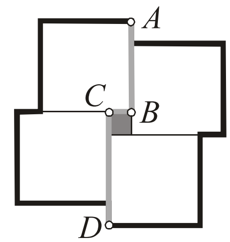
3. Ясно е, че има поне едно трицифрено число 555. Не може да има две трицифрени числа, защото 555 + 555 = 1110 > 1000. **(2 т.)**

4. Останалите 17 петици са двуцифрени и едноцифрени числа, чийто сбор е $1000-555=445$. Тъй като 8.55 = 440, то 8 от числата са двуцифрени **(2 т.)** и останалата петица е едноцифреното число. **(1 т.)** Окончателно

$$555+\underbrace{55+55+\cdots+55}_{8}+5=1000. \text{ (1 т.)}$$

4.2. Числата 2, 7, 12, 17, 22, 27, ..., 2002, 2007 са записани по следното правило: след всяко число записваме сбора му с 5, докато стигнем до 2007. Колко числа са записани?

Решение. Цифрите на единиците на записаните числа се редуват в последователността 2, 7, 2, 7,..., като очевидно броят на числата с цифра на единиците 2 е равен на броя на числата с цифра на единиците 7. **(3 т.)** Затова ще преброим само тези с цифра на единиците 2. **(1 т.)** Техният брой е равен на броя на числата от 0 до 200 включително **(2 т.)**, а той е 201, защото броенето започва от нулата **(3 т.).** Следователно търсеният брой е равен на 2.201 = 402. **(1 т.)**



4.3. Фигурата на чертежа е съставена от четири големи квадрата с равни страни и един малък квадрат. Страната на всеки от големите квадрати е 4 пъти по-голяма от страната на малкия квадрат и дължината на начупената линия *ABCD* е 30 см. Да се намерят лицето и обиколката на получената фигура.

Решение. Дължината на начупената линия *ABCD* е равна на удвоения сбор на дължините на страните на малкия и големия квадрат. **(2 т.)** Понеже страната на големия квадрат е 4 пъти по-голяма от страната на малкия квадрат, то 10 пъти дължината на малкия квадрат е 30 см, т.е. страната на малкия квадрат е 3 см. **(2 т.)** Следователно страната на всеки от големите квадрати е 12 см. **(1 т.)** Така за лицето S намираме $S=9+4.144=585$, $S=585$ кв. см. **(2 т.)** За всеки от големите квадрати в обиколката участват две от страните му и отсечка равна на страната на малкото квадратче, т.е. $2.12+3=27$ см. Следователно обиколката е $4.27=108$ см. **(3 т.)**

4.4. Запишете върху всяко картонче по една цифра, така че едновременно да са изпълнени шестте равенства.

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{}\boxed{} & - & \boxed{} & = & \boxed{}\boxed{} \\
\times & & + & & \times \\
\boxed{} & + & \boxed{} & = & \boxed{}\boxed{} \\
= & & = & & = \\
\boxed{}\boxed{} & + & \boxed{} & = & \boxed{}\boxed{}\boxed{}
\end{array}$$

Решение. Сборът в третия ред на схемата е "двуцифрено + едноцифрено = трицифрено". Възможните сборове от този вид са от 91 + 9 = 100 до 99 + 9 = 108 **(1 т.)**. Тогава двуцифреното събираемо има цифра на десетиците 9 **(1 т.)**. От друга страна трицифреното число е произведение на две двуцифрени числа. Възможните произведения от този вид са 10.10 = 100; 10.11 = 110; **(1 т.)** и т.н. Следователно трицифреното число е точно 100 **(1 т.)** и е произведението 10.10. **(1 т.)** Така вече е попълнена най-дясната колона в схемата. Разликата "двуцифрено – едноцифрено" в първия ред е 10, откъдето намираме, че двуцифреното число има цифра на десетиците 1. **(1 т.)**

До тук имаме:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{1}\boxed{a} & - & \boxed{a} & = & \boxed{1}\boxed{0} \\
\times & & + & & \times \\
\boxed{b} & + & \boxed{10\text{-}b} & = & \boxed{1}\boxed{0} \\
= & & = & & = \\
\boxed{9}\boxed{} & + & \boxed{} & = & \boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}
\end{array}$$

(1 т.)

Остава да се приложи методът на изчерпването, например за стойностите на *a*.

При $a=1$, $b=9$, но равенството във втората колона не е изпълнено.

При $a=2$, $b=8$ получаваме решението **(1 т.)**:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{1}\boxed{2} & - & \boxed{2} & = & \boxed{1}\boxed{0} \\
\times & & + & & \times \\
\boxed{8} & + & \boxed{2} & = & \boxed{1}\boxed{0} \\
= & & = & & = \\
\boxed{9}\boxed{6} & + & \boxed{4} & = & \boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}
\end{array}$$

За останалите стойности на цифрата *a* аналогично се проверяват равенствата в схемата и се установява, че друго решение няма. **(2 т.)**