Кратки решения на задачите

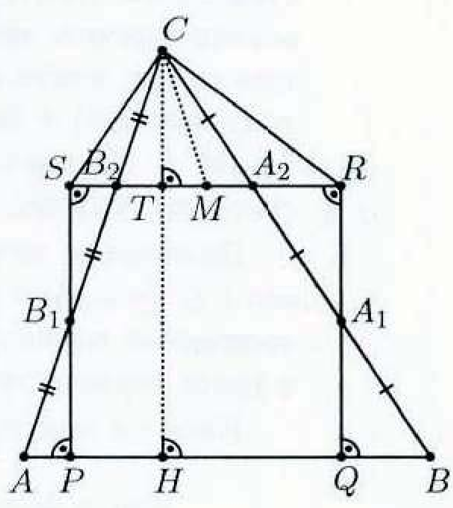
Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, при които уравнението $(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) = a$ има четири реални и различни корени, произведението на които е равно на 2.

Решение. Нека разглежданото уравнение има четири реални и различни корени. Полагаме $y = x^2 - 2x$. Тогава уравнението $y^2 - 3y - a = 0$ трябва да има два различни и реални корена. Означаваме ги с y_1 и y_2. Уравненията $x^2-2x-y_1 = 0$ и $x^2-2x-y_2 = 0$ трябва да имат съответно по два реални и различни корена, защото $y_1 \neq y_2$. Ако x_1, x_2 и x_3, x_4 са съответно корените на тези уравнения, от формулите на Виет ще имаме $x_1x_2 = -y_1$ и $x_3x_4 = -y_2$, откъдето $2 = x_1x_2x_3x_4 = (-y_1)(-y_2) = y_1y_2 = a$. Единствената възможност за a е $a = -2$.

Нека $a = -2$. Уравнението $y^2 - 3y + 2 = 0$ има корени $y_1 = 1$ и $y_2 = 2$, съответните уравнения за x имат корени $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ и $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}$, които са реални и различни.

Задача 9.2. Дадени са триъгълник ABC и квадрат $PQRS$, разположени така, че $P, Q \in AB$, а отсечките QR, RS и SP разделят страните AC и BC на по три равни части. Да се докаже, че $\sphericalangle SCR = 90^\circ$ тогава и само тогава, когато $AC = BC$.

Решение. Нека $A_1 = BC \cap QR$, $A_2 = BC \cap RS$, $B_2 = AC \cap RS$, $B_1 = AC \cap SP$, като $AB_1 = B_1B_2 = B_2C$ и $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. Тъй като $\triangle BQA_1 \cong \triangle A_2RA_1$, точката A_1 е среда на RQ. Аналогично се вижда, че B_1 е среда на SP. Нека $CH \perp AB$, $H \in AB$ и $CH \cap RS = T$. Тогава $\triangle CTB_2 \cong \triangle B_1SB_2$ и $\triangle CTA_2 \cong \triangle A_1RA_2$. Оттук $CT = SB_1 = RA_1 = RQ/2$.



Ако $AC = BC$, то $\triangle APB_1 \cong \triangle BQA_1$ и значи $AP = BQ$. Тогава CH е симетрала на PQ, оттам и на SR, т.е. $ST = RT = SR/2 = RQ/2 = CT$ и следователно $\sphericalangle SCR = 90^\circ$.

Ако $\sphericalangle SCR = 90^\circ$, то в $\triangle SRC$ медианата CM е равна на половината от страната SR, т.е на височината CT.
Тогава $M \equiv T$, $CS = CR$ и $\sphericalangle CSR = \sphericalangle CRS = 45^\circ$. Остава да видим, че $\triangle CSB_1 \cong \triangle CRA_1$, откъдето $CB_1 = CA_1$ и значи $CA = CB$.

Забележка. Равенствата $CT = SB_1 = RA_1 = RQ/2$ следват веднага и от теоремата на Талес.

Задача 9.3. Да се намерят всички естествени числа $m > 1$ и $n > 1$, за които n дели $m + 1$ и m дели $n^2 - n + 1$.

Решение. Нека $m+1=nk$, където k е естествено число. От $m|n^2-n+1=n^2-n+nk-m=n(n+k-1)-m$ следва, че $m|n(n+k-1)$. Тъй като $(m,n)=1$ поради $m+1=nk$, получаваме $m|n+k-1$.

От $m|n^2-n+1$ и $n>1$ следва, че $m<n^2$. Тогава $k=\frac{m+1}{n}<\frac{n^2+1}{n}<n+1$. Следователно $m\le n+k-1<2n$, откъдето $kn=m+1<2n+1$, т.е. $k\le 2$. При $k=1$ имаме $m=n-1|n^2-n+1$, което е възможно само при $n=2$ и съответно $m=1$. При $k=2$ получаваме $m=2n-1|n^2-n+1$, откъдето $2n-1|4n^2-4n+4=(2n-1)^2+3$, т.е. $2n-1|3$ и $n=1$ или $n=2$, съответно $m=1$ или $m=3$.

Окончателно $(m,n)=(3,2)$ е единственото решение на задачата.

Задача 9.4. Върху окръжност са избрани $n\ge 3$ точки, някои от които са свързани с отсечки. Общият брой на прекараните отсечки е $m\ge 1$. За произволно оцветяване на точките в три цвята (червен, син и зелен) с m_1 означаваме броя на отсечките, имащи за край две червени точки, с m_2 – броя на отсечките, имащи за край две сини точки и с m_3 – броя на отсечките, имащи за край две зелени точки. Да се докаже, че съществува оцветяване на точките в червен, син и зелен цвят, за което

$$3m_1+2m_2+m_3<\frac{6}{11}m.$$

Решение. За малки n твърдението е очевидно. Да допуснем, че за $n-1$ точки съществува оцветяване, за което неравенството е в сила. Да означим m' броя на всички отсечки, прекарани между тези $n-1$ точки, а с m_1', m_2', m_3' съответно броя на тези от тях, които имат два червени, сини или зелени края. Съгласно индукционното допускане $3m_1'+2m_2'+m_3'<\frac{6}{11}m'$. Нека новата точка е x, а d_x е броят на отсечките с край x. Да означим с a,b,c съответно броя на отсечките с край x и втори край съответно червена, синя или зелена точка. Очевидно $a+b+c=d_x$ и $m'+d_x=m$.

Да оцветим точката x в червено, ако $a\le\frac{2}{11}d_x$, в синьо, ако $b\le\frac{3}{11}d_x$ и в зелено, ако $c\le\frac{6}{11}d_x$. Ако две от тези (или и трите) неравенства са в сила, оцветяваме x по произволен начин в един от допустимите цветове. Лесно се вижда, че не е възможно и трите неравенства едновременно да не са изпълнени.

Нека x е оцветена в червено. Тогава

$$\begin{aligned}3m_1+2m_2+m_3 &= 3(m_1'+a)+2m_2'+m_3'=(3m_1'+2m_2'+m_3')+3a\\ &< \frac{6}{11}m'+3\cdot\frac{2}{11}d_x\\ &= \frac{6}{11}(m'+d_x)=\frac{6}{11}m.\end{aligned}$$

Неравенството се проверява аналогично, когато x се оцветява в синьо или зелено.