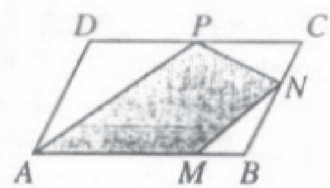
Тема за 7 клас

Задача 1. В 8:30 ч. от София за Бургас тръгва автобус. След 30 мин от Бургас за София тръгва втори автобус, като двата автобуса се движат с една и съща постоянна скорост. В колко часà ще се срещнат автобусите, ако изминават разстоянието от София до Бургас за 5 ч?

Решение: Понеже 5 ч са 300 мин, то за 30 мин първият автобус изминава $\frac{1}{10}$ от разстоянието (2 т.). Така, след тръгването на втория автобус, автобусите изминават останалите $\frac{9}{10}$ от разстоянието и се срещат по средата на това разстояние, понеже се движат с еднакви скорости (1 т.). Следователно всеки от автобусите изминава $\frac{9}{20}$ от разстоянието за $\frac{9}{20}\cdot 300 = 135$ мин (2 т.). Така намираме, че до срещата първият автобус е пътувал $135+30=165$ мин = 2 ч 45 мин. Следователно автобусите ще се срещнат в 11:15 ч. (1 т.)

Задача 2. Даден е успоредник $ABCD$ и точки M, N и P съответно върху страните AB, BC и CD така, че $BM=\frac{1}{4}BA$, $CN=\frac{1}{3}CB$ и $CP=PD$. Да се намери лицето на успоредника, ако лицето на четириъгълника $AMNP$ е 210 cm^2.



Решение: Ако $S_{ABCD}=S$, то $S_{AMNP}=S-\left(S_{ADP}+S_{CPN}+S_{BNM}\right)$. (1 т.) Последователно намираме: $S_{ADP}=\frac{1}{2}S_{ADC}$ (равни височини през A), $S_{ADC}=\frac{1}{2}S$, т.е. $S_{ADP}=\frac{1}{4}S$ (1 т.); $S_{CPN}=\frac{1}{3}S_{BCP}$ (равни височини през P), $S_{BCP}=\frac{1}{4}S$, откъдето $S_{CPN}=\frac{1}{12}S$ (1 т.); $S_{ANB}=\frac{2}{3}S_{ABC}=\frac{1}{3}S$, $S_{BNM}=\frac{1}{4}S_{ABN}=\frac{1}{12}S$ (2 т.). Следователно

$$210=S-\left(\frac{1}{4}S+\frac{1}{12}S+\frac{1}{12}S\right)=S-\frac{5}{12}S=\frac{7}{12}S,\text{ т.е. } S=360\text{ cm}^2 \text{ (1 т.)}.$$

Задача 3. Дадени са n различни естествени числа $1=a_1<a_2<\cdots<a_n=2010$, като сборът на всеки $n-1$ от тях се дели на $n-1$. Да се намери най-голямата възможна стойност на n.

Решение: От условието, че сборът на всеки $n-1$ от числата се дели на $n-1$, следва, че разликата на всеки две от тях се дели на $n-1$. Това е така, защото $a_k-a_j=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a_j-(a_1+a_2+\cdots+a_n)+a_k \Rightarrow (n-1)$ дели (a_n-a_1) (2 т.). Освен това $2009=a_n-a_1=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)\geq(n-1)^2$ (1 т.). Следователно $n-1$ е делител на 2009 и е по-малък от 45 ($45^2=2025>2009$), т.е. най-голямата възможна стойност е $n=42$. (1 т.)

Например при $n=42$ можем да вземем следните 42 числа $a_k=1+(k-1).41$ за $k=1,2,3,\cdots,41$ и $a_{42}=2010$. (3 т.)

Задача 4. В един град има 151 спортни клуба, като във всеки от тях членуват точно по 12 жители на града. Известно е, че кои да е два клуба имат точно по един общ член, а кметът на града членува в клубовете “Спортист” и “Футболист”. В още колко клуба членува кметът?

Решение: Нека $a_1, a_2, ..., a_{12}$ са членовете на клуб "Спортист" и нека a_i ($i = 1, 2, ..., 12$) членува още в n_i на брой клуба (1 т.). От условието следва, че $n_1 + n_2 + ... + n_{12} = 150$ (1 т.). Тъй като $12^2 = 144 < 150$, то поне един от членовете на "Спортист" членува в поне още 13 клуба (1 т.). Нека това е a_k и нека K_1, K_2, ..., K_{13} са 13 от клубовете, различни от "Спортист", в които членува a_k. Ще докажем, че a_k членува във всички клубове в града. Да допуснем противното и нека X е клуб, в който a_k не членува (1 т.). Сега да разгледаме общите членове на K_1, K_2, ..., K_{13} и X. Тъй като в един клуб има точно 12 членове, то поне един от членовете на X членува в поне още 2 клуба измежду K_1, K_2, ..., K_{13}. При това този жител, който членува в X и в поне 2 клуба измежду K_1, K_2, ..., K_{13}, е различен от a_k. Но тези 2 клуба имат общ член a_k и това е противоречие с условието, че всеки два клуба имат точно по един общ член (1 т.). Следователно a_k членува във всички клубове в града (1 т.). Това е възможно само ако a_k е кметът, защото в противен случай "Спортист" и "Футболист" ще имат повече от един общ член. Така получаваме, че отговорът на задачата е $151 - 2 = 149$ (1 т.).