# Тема за 6 клас

**Задача 1.** Да се пресметне $|A|$, където:

$$A=\frac{1}{2008.2010}+\frac{1}{2008.2009.2010}+\frac{1}{2007.2008.2009}-\frac{2008^2}{2007.2009}.$$

*Решение*: Последователно пресмятаме:

$$A=\frac{1}{2008.2010}+\frac{1}{2008.2009.2010}+\frac{1}{2007.2008.2009}-\frac{2008^2}{2007.2009}=$$

$$=\frac{2009+1}{2008.2009.2010}+\frac{1}{2007.2008.2009}-\frac{2008^2}{2007.2009}= \qquad (5\text{ т.})$$

$$=\frac{1}{2008.2009}+\frac{1}{2007.2008.2009}-\frac{2008^2}{2007.2009}=$$

$$=\frac{2007+1}{2007.2008.2009}-\frac{2008^2}{2007.2009}=\frac{1-2008^2}{2007.2009}=\frac{-4\,032\,063}{4\,032\,063}=-1.$$

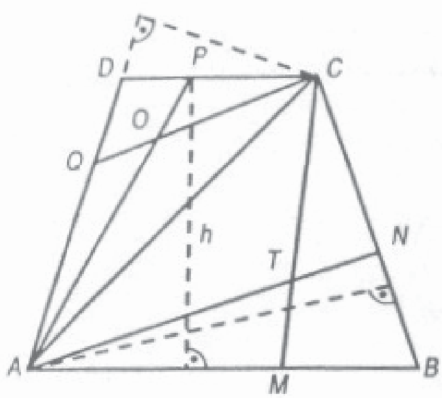
Следователно $|A|=|-1|=1$ (1 т.).

**Задача 2.** Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB$ и $CD$. Върху страните $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$ са взети съответно точки $M$, $N$, $P$ и $Q$ така, че $AM=\frac{2}{3}AB$, $CN=\frac{2}{3}CB$, $CP=\frac{2}{3}CD$ и $AQ=\frac{2}{3}AD$.

а) Ако лицето на трапеца е 360 кв. см, намерете лицата на четириъгълниците $AMCP$ и $ANCQ$.

б) Ако $AN$ пресича $CM$ в точка $T$ и $AP$ пресича $CQ$ в точка $O$, докажете, че $S_{ATM}+S_{COP}=S_{AOQ}+S_{CTN}$.

*Решение*:




а) Нека $h$ е височината на трапеца $ABCD$. Четириъгълникът $AMCP$ е трапец със същата височина и следователно лицето му е равно на

$$\frac{AM+CP}{2}\cdot h=\frac{\frac{2}{3}AB+\frac{2}{3}CD}{2}\cdot h=\frac{2}{3}\left(\frac{AB+CD}{2}\cdot h\right)=\frac{2}{3}S_{ABCD}=\frac{2}{3}\cdot 360=240\text{ кв.см (2 т.)}.$$

Построяваме диагонала $AC$. Тогава $S_{ACQ}=\frac{2}{3}S_{ACD}$, тъй като двата триъгълника имат равни височини от върха $C$. Аналогично $S_{ANC}=\frac{2}{3}S_{ABC}$ (двата триъгълника имат равни височини от върха $A$) (1 т.). Следователно

$S_{ANCQ} = S_{ANC} + S_{ACQ} = \frac{2}{3}S_{ABC} + \frac{2}{3}S_{ACD} = \frac{2}{3}S_{ABCD} = \frac{2}{3}\cdot 360 = 240$ кв.см (1 т.).

б) Имаме $S_{AMCP} = S_{ATM} + S_{ATCO} + S_{COP}$ и $S_{ANCQ} = S_{CTN} + S_{ATCO} + S_{AOQ}$. От доказаното в а) следва, че $S_{ANCQ} = \frac{2}{3}S_{ABCD} = S_{AMCP}$ и следователно $S_{AMCP} - S_{ATCO} = S_{ANCQ} - S_{ATCO}$. Оттук $S_{ATM} + S_{COP} = S_{AOQ} + S_{CTN}$ (2 т.).

**Задача 3.** Правоъгълна таблица има 30 реда и 67 стълба. Във всяко квадратче на таблицата е написано едно и също естествено число. Съседни квадратчета наричаме тези, които имат обща страна. Извършваме следната операция: избираме произволно квадратче и ако то има четен брой съседни квадратчета, прибавяме единица към всяко от числата в тях, а ако то има нечетен брой съседни квадратчета, прибавяме двойка към всяко от числата в тях. Възможно ли е след многократно повтаряне на тази операция броят на четните и нечетните числа в таблицата да стане един и същ?

*Решение*: Има три вида квадратчета – с 2 съседа (четирите ъглови), с 3 съседа (тези по страните на таблицата) и с 4 съседа (от вътрешността на таблицата). При извършване на операцията прибавяме общо съответно 2, 6 или 4. Оттук следва, че четността на сбора на числата в таблицата не се променя (2 т.). Ако първоначално всички числа са равни на $a$, то сборът е $2010a$, защото $67.30 = 2010$. Сборът е четно число и той ще остава четен след всяко прилагане на операцията (2 т.). Броят на квадратчетата в таблицата е 2010 и ако можехме да постигнем желаната цел, точно 1005 от числата в таблицата трябваше да са нечетни. Но тогава сборът им също щеше да е нечетно число. Сборът на числата в останалите квадратчета обаче е четен и сборът на всички числа в таблицата би се оказал нечетен, което е невъзможно (2 т.). Заключаваме, че не е възможно да се изравнят числата с помощта на тази операция (1 т.).

**Задача 4.** Да се реши числовият ребус $a^b = c^d \cdot \overline{cd}$, в който на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви отговарят различни цифри.

*Решение*: Ясно е, че никоя от цифрите $a, b$ и $c$ не може да бъде равна на нула. Ако предположим, че $d = 0$, дясната страна на ребуса става двуцифрено число, завършващо на нула. Но няма степен на едноцифрено ненулево число, завършващо на нула. Следователно и четирите търсени цифри не са равни на нула. Да разгледаме възможни стойности на цифрата $a$, като отбележим, че числото $a^b$ има двуцифрен делител – числото $\overline{cd}$. Оттук получаваме, че $a$ не може да е равно на 1. (1 т.)

Ако $a = 2$, то всяко от числата $c^d$ и $\overline{cd}$ трябва да е степен на 2. Това е възможно само ако $c = 1, 2, 4$ или 8. Ако $c = 1$, то единствената степен на двойката от вида $\overline{1d}$ е числото 16, откъдето $d = 6$. Тогава $c^d.\overline{cd} = 1^6.16 = 2^4$ и получаваме решението $a = 2, b = 4, c = 1, d = 6$, т.е. $2^4 = 1^6.16$. Случаите $c = 2$, $c = 4$ и $c = 8$ не водят до решение на ребуса, понеже няма двуцифрени степени на 2, започващи с цифрата 2, 4 или 8. Случаят $c = 2$ отпада и заради изискването цифрите $a$ и $c$ да са различни. По същия начин разглеждаме случая $a = 4$ и тогава двата множителя $c^d$ и $\overline{cd}$ трябва да са степени на двойката, откъдето отново $c = 1, 2, 4$ или $8$. Пак единствената възможност за $c$ е $c = 1$ и достигаме до второто решение на ребуса, а именно $a = 4, b = 2, c = 1, d = 6$, т.е. $4^2 = 1^6.16$. В случая $a = 8$ постъпваме по същия начин и правим извода, че ново решение на ребуса не се получава. (2 т.)

Нека сега $a=3$. Тогава $c^d$ и $\overline{cd}$ трябва да са степени на 3, откъдето $c=1$, $c=3$ или $c=9$. Но няма двуцифрено число, започващо с 1, 3 или 9, което да е степен на 3. Случаят $c=3$ отпада и заради изискването цифрите $a$ и $c$ да са различни. Следователно не получаваме ново решение на ребуса. Аналогично разсъждаваме за $a=9$ и отново не получаваме ново решение на ребуса. (1 т.)

Ако $a=5$ или $a=7$, то съответно $c=5$ и $c=7$, понеже 5 и 7 са прости числа. Това обаче не е възможно, защото $a$ и $c$ трябва да са различни. (1 т.)

Остава да разгледаме случая $a=6$. Тогава простите множители на $a^b$ са двойки и тройки, откъдето (като отчетем, че $a$ и $c$ са различни) следва, че $c=1, 2, 3, 4, 8$ или 9. Освен това в разлагането на числото $\overline{cd}$ на прости множители участват само 2 и 3. Разглеждаме последователно възможните стойности на $c$. При $c=1$ множителят $\overline{1d}$ трябва да е степен на 6, но това е невъзможно. При $c=2$ множителят $\overline{2d}$ трябва да е произведение на двойки и тройки с по-голям брой на тройките. Това е възможно само ако $\overline{cd}=27$. С проверка установяваме, че не се получава решение на ребуса. При $c=3$ възможностите са $\overline{cd}=32$ и $\overline{cd}=36$, но и в двата случая не получаваме решение на ребуса. При $c=4$ е възможно само $\overline{cd}=48$. Но тогава в произведението $c^d.\overline{cd}$ степента на 2 е по-голяма от степента на 3 и следователно отново не получаваме решение. При $c=8$ е възможно само $\overline{cd}=81$, но и сега произведението $c^d.\overline{cd}$ не е степен на 6. В последния случай $c=9$ единствената възможност е $\overline{cd}=96$. Но тогава $a=d=6$, което не е възможно. (2 т.)

Окончателно даденият ребус има две решения: $2^4=1^6.16$ и $4^2=1^6.16$.