Тема за 5 клас

Задача 1. В турнир по футбол участвали четири отбора, които изиграли помежду си по един мач. При победа победителят получавал 3 т., победеният 0 т., а при равен мач двата отбора получавали по 1 т. На второ място се класирал един отбор с 3 т., а на първо място – също един отбор, но с повече от 3 т. Да се възстановят резултатите в изиграните мачове (победи, равни, загуби и точките на участващите отбори).

Решение: Нека **A**, **B**, **C** и **D** са отборите по реда на класирането. Тъй като всеки отбор е изиграл 3 мача, то 3 т. могат да се получат по два начина: 1 победа и 2 загуби или 3 равни мача (1 т.). Ако класиралият се на второ място отбор (**B**) има 1 победа и две загуби, то ще има още два отбора, които имат 3 или повече точки (отборите, които са победили **B**). Но съгласно условието това е невъзможно. Следователно **B** е постигнал три равни резултата (1 т.). Тогава **A** не може да е постигнал втори равен резултат, защото тогава някой от отборите **C** или **D** ще има 3 или повече точки. Следователно **A** има точно един равен мач и две победи. Заключаваме, че **A** е пръв със 7 т. (2 т.) Единствената възможност за **C** и **D** е да са завършили наравно помежду си, защото в противен случай един от тях ще е с 4 точки и ще е преди **B** в класирането.

Следователно **C** и **D** имат по 2 т. и делят 3-то и 4-то място. (2 т.)

Задача 2. На дъската е написано числото **27 905,53681**. Ангел и Борис играят следната игра: един след друг те задраскват по една цифра, като Ангел се стреми новото число да е възможно най-голямо, а Борис се стреми новото число да е възможно най-малко. Играта завършва, когато някой от играчите не може да направи ход. Кое число остава на дъската при правилна игра на двамата?

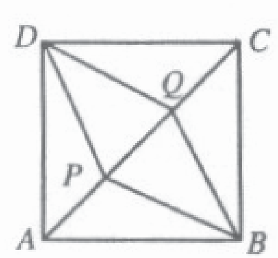
Решение: **Отг. 0,8.** Нека Ангел играе пръв, а Борис – втори. Последователните числа, които се появяват на дъската, са: 27 905,5681 (1 т.), 2705,5681 (1 т.), 2705,681 и 205,681 (1 т.), 205,81 и 20,81 (1 т.), 20,8 и 0,8 (1 т.). По-нататъшно задраскване на цифра води до безсмислен запис. Ако Борис играе пръв, а Ангел – втори, крайният резултат е отново 0,8 (1 т.).

Задача 3. Точки P и Q се поставят вътре в квадрат $ABCD$ и се свързват с върховете на квадрата. Могат ли точките P и Q да се поставят така, че получените части от квадрата да са равнолицеви и броят им да е равен на:

а) 6 ;

б) 9?

Решение:

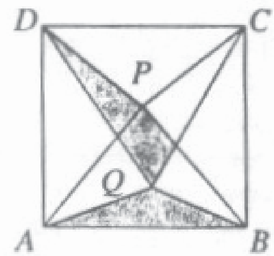


а) Да. Нека например P и Q лежат на диагонала AC и $AP = PQ = QC$ (1 т.). Тогава

$$S_{ABP} = S_{BPQ} = S_{BQC} = S_{CDQ} = S_{DQP} = S_{DPA} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$$

За обосноваване но горните равенства (2 т.).

б) Не. Ако има такова разделяне, точката Q трябва да е вътрешна за някой от триъгълниците ABP, BCP, CDP или DPA (1 т.). Нека например Q е вътрешна за ΔABP, както е на чертежа.



Тогава 5 от частите образуват два триъгълника (в случая ABQ и DCQ) (1 т.). Тъй като $S_{ABQ}+S_{CDQ}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ (1 т.), то $\frac{1}{10}S_{ABCD}\neq\frac{1}{9}S_{ABCD}$ (1 т.).

Задача 4. Едно естествено число се нарича палиндром, ако се чете по един и същ начин отляво надясно и отдясно наляво. Например числото 12 321 е палиндром. Да се намерят всички четирицифрени палиндроми, които са произведения на две последователни естествени числа.

Решение: Търсените палиндроми са от вида $n(n+1)$, където n е естествено число (1 т.). Числото $n(n+1)$ завършва на 0 (ако n завършва на 0, 4, 5 или 9), на 2 (ако n завършва на 1, 3, 6 или 8) или на 6 (ако n завършва на 2 или 7) (2 т.) (1 т. за правилни разсъждения в един от случаите, а 2 т. за правилни разсъждения в трите случая). Първият случай отпада, защото един палиндром не може да завършва на нула (първата му цифра съвпада с последната). Във втория случай палиндромът трябва да е от вида $\overline{2aa2}$, където a е цифра. Тъй като $44.45=1980<2002$, $45.46=2070>2002$, $54.55=2970<2992$ и $55.56=3080>2992$, то в израза $n(n+1)$ числото n трябва да е между 45 и 54 включително. От друга страна n трябва да завършва на 1, 3, 6 или 8 и задачата се свежда до проверка на случаите $n=46$, $n=48$, $n=51$ и $n=53$. Съответните четирицифрени числа са $46.47=2162$, $48.49=2352$, $51.52=2652$ и $53.54=2862$, но нито едно от тях не е палиндром. (2 т. за пълно изчерпване на този случай). В третия случай палиндромът трябва да е от вида $\overline{6aa6}$. Сега $76.77=5852<6006$, $77.78=6006$, $83.84=6972<6996$ и $84.85=7140>6996$, откъдето заключаваме, че числото n трябва да е между 77 и 83. Освен това n трябва да завършва на 2 или 7 и задачата се свежда до проверка на случаите $n=77$ и $n=82$. Единственият палиндром е при $n=77$ и той е 6006. (2 т. за пълно изчерпване на този случай).