Кратки решения на задачите

Задача 12.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

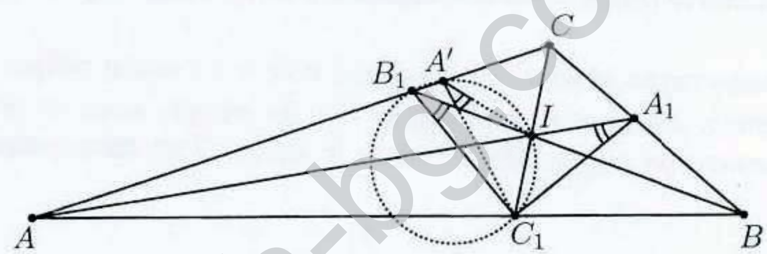
$$2 \cdot 2^{\cos 2x} - a \cdot 2^{\cos^2 x} = 2$$

има решение.

Решение. Полагаме $t = 2^{\cos^2 x}$. Тогава $1 \leq t \leq 2$ и от $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ следва, че даденото уравнение има решение тогава и само тогава, когато уравнението $f(t) = t^2 - at - 2 = 0$ има корен в затворения интервал $[1, 2]$. За всяко a последното уравнение има два реални корена с различни знаци и условието е изпълнено точно когато $f(1) \leq 0$, $f(2) \geq 0$. Оттук намираме, че $a \in [-1, 1]$.

Задача 12.2. Нека AA_1, BB_1 и CC_1 са ъглополовящи в $\triangle ABC$ ($AC \neq BC$). Да се намери $\sphericalangle ACB$, ако $\sphericalangle AA_1C_1 = \sphericalangle BB_1C_1$.

Решение. Нека $AC > BC$ и A' е симетричната точка на A_1 спрямо CC_1.



Ако I е пресечната точка на ъглополовящите, то $\sphericalangle IA'C_1 = \sphericalangle IA_1C_1 = \sphericalangle IB_1C_1$. Оттук четириъгълникът $A'C_1IB_1$ е вписан в окръжност и следователно

$$CA' \cdot CB_1 = CI \cdot CC_1 \qquad (*)$$

Ако $BC = a, CA = b$ и $AB = c$, имаме, че

$$CA' = CA_1 = \frac{ab}{b+c},\ CB_1 = \frac{ab}{a+c},\ CI \cdot CC_1 = \frac{a+b}{a+b+c} CI^2 = ab\frac{a+b-c}{a+b}.$$

Замествайки в $(*)$, следва, че $a^2 + b^2 + ab = c^2$ и от косинусовата теорема намираме $\sphericalangle ACB = 120^\circ$.

Задача 12,3. Нека n е естествено число такова, че $n+1$ се дели на 24 и сумата от квадратите на различните делители на n (включително 1 и n) се дели на 48. Колко най-малко различни делители може да има n?

Решение. (Първи начин) Тъй като $n+1$ се дели на 4, то n не е точен квадрат. Тогава можем да групираме различните делители на n по двойки $(a_0, b_0) = (1, n)$, $(a_1, b_1), \ldots, (a_s, b_s)$ като $a_k b_k = n$, $0 \leq k \leq s$. Тогава

$$a_k + b_k = a_k + \frac{n}{a_k} = \frac{a_k^2 - 1 + n + 1}{a_k}$$

math-bg.com

се дели на 24, тъй като $24|n+1$ и $24|a_k^2-1$, тъй като a_k е взаимно просто с 2 и 3. От условието имаме, че 48 дели числото

$$\begin{aligned} & (a_0^2+b_0^2)+(a_1^2+b_1^2)+\ldots+(a_s^2+b_s^2) \\ = \ & (a_0+b_0)^2-2a_0b_0+(a_1+b_1)^2-2a_1b_1+\ldots+(a_s+b_s)^2-2a_sb_s \\ = \ & (a_0+b_0)^2+(a_1+b_1)^2+\ldots+(a_s+b_s)^2-2n(s+1). \end{aligned}$$

От доказаното по-горе следва, че $48|2(s+1)$, т.е. n има поне 48 различни делители.

Нека $n=23^{47}$. Тогава $24|23^{47}+1$. От друга страна n има точно 48 различни делители $1, 23, 23^2, \ldots, 23^{47}$ и сумата от техните квадрати се дели на 48, защото $23^{2k} \equiv 1 \pmod{48}$, $0 \le k \le 47$.

(Втори начин) Всеки делител d на n е взаимнопрост с 24 и следователно $d \equiv \pm1, \pm5, \pm7, \pm11 \pmod{24}$. Оттук $d^2 \equiv 1$ или $25 \pmod{48}$. Да означим с a (съответно b) броя на делителите на n, които са от вида $24k\pm1, 24k\pm7$ (съответно от вида $24k\pm5, 24k\pm11$). Да отбележим, че b е четно (понеже от $d=24k+r$ следва, че $n/d=24k-r$). Сега получаваме

$$0 \equiv \sum_d d^2 \equiv a+25b \equiv a+b \pmod{48},$$

което означава, че броят на делителите на n е поне 48.

Задача 12.4. Да се докаже, че

$$a^2(b-c)^2+b^2(a-c)^2+c^2(a-b)^2 \ge \frac{9}{2}abc(1-abc)$$

за произволни реални числа a, b, c със сума 3.

Решение. Полагаме $q=ab+bc+ca$ и $p=abc$. След преобразувания неравенството приема вида (**) $q^2 \ge \frac{9}{4}p(5-p)$. Можем да считаме, че $p \in (0,1)$ (иначе началното неравенство е очевидно). Тогава дясната страна на (**) е растяща функция на p. Движейки графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2+qx-p$ успоредно на оста Oy, виждаме, че стойността на p е най-голяма, когато f има двойна нула (която не надминава третата нула на f). Значи можем да считаме, че $a=1+2x$, $b=c=1-x$ ($x \ge 0$). Имаме да докажем, че

$$(1-x)^2(1-x+2(1+2x))^2 \ge \frac{9}{4}(1-x)^2(1+2x)(5-(1-x)^2(1+2x)) \Leftrightarrow$$

$$(1-x)^2(4(1+x)^2-(1+2x)(4+3x^2-2x^3)) \ge 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)^2(2x-1)^2 \ge 0,$$

което е очевидно.

Задачите са предложени както следва: Иван Тонов 9.1, Петър Бойваленков 9.2, 9.3, Стоян Боев 10.1, 10.2, Керопе Чакърян 10.3, Иван Ланджев 9.4, 10.4, Емил Колев 11.1, 11.4, Александър Иванов 11.2, 11.3, Олег Мушкаров 12.1, 12.3, Николай Николов 12.2, 12.4.

math-bg.com